N° C.N.R.S.

Article principal recouvrant en tout la

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

par Monsieur JOLIVET Jean-Loup

« Problèmes de connexité et problèmes hamiltoniens en théorie des graphes. Joint d'une famille de graphes et généralisation de la notion de graphe parfait ».

16 JUIN 1975

soutenue le : Juin 1975

devant la Commission d'examen composée de :

- M. VIGNES, Professeur à l'Université PARIS VI, Président.
- M. BERGE, Directeur de Recherches au C.N.R.S.
- M. BOUCHET, Maître de Conférences au Centre Universitaire du Mans.
- M. CHEIN, Professeur à l'Université PARIS VI.
- M. NIVAT, Professeur à l'Université PARIS VII.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548105_0025

N° C.N.R.S.

Article principal recouvrant en tout la

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

par Monsieur JOLIVET Jean-Loup

« Problèmes de connexité et problèmes hamiltoniens en théorie des graphes. Joint d'une famille de graphes et généralisation de la notion de graphe parfait ».

soutenue le : Juin 1975

devant la Commission d'examen composée de :

- M. VIGNES, Professeur à l'Université PARIS VI, Président.
- M. BERGE, Directeur de Recherches au C.N.R.S.
- M. BOUCHET, Maître de Conférences au Centre Universitaire du Mans.
- M. CHEIN, Professeur à l'Université PARIS VI.
- M. NIVAT, Professeur à l'Université PARIS VII.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Jean-Loup JOLIVET
Département de Mathématiques
U.E.R. de Sciences
72017 - LE MANS Cédex.

PROBLEMES DE CONNEXITE ET PROBLEMES HAMILTONIENS EN THEORIE DES GRAPHES JOINT D'UNE FAMILLE DE GRAPHES ET GENERALISATION DE LA NOTION DE GRAPHE PARFAIT.

Je remercie vivement :

Monsieur le Professeur VIGNES J. qui a bien voulu présider le jury de cette thèse et me donner le sujet de seconde thèse,

Monsieur le Professeur NIVAT qui a accepté d'en être le rapporteur,

Monsieur le Professeur C.BERGE qui a suivi mes recherches et m'a donné de nombreuses fois d'exposer mes résultats aux séminaires qu'il organise,

Messieurs les Professeurs CHEIN et BOUCHET avec qui j'ai travaillé pendant plusieurs années et à qui cette thèse doit beaucoup.

Je tiens également à remercier tous ceux que j'ai rencontré dans les séminaires de la Faculté des Sciences du Mans et de la Maison des Sciences de l'Homme, auprès de qui j'ai trouvé l'atmosphère de travail favorable à ma recherche ; notamment plusieurs amis : M.RIVIERE, A.DUCHAMP, J.C.BERMOND et J.C.MEYER qui m'ont apporté de nombreuses suggestions.

Mesdames BRAULT, GASSE et LANGEVEN, secrétaires à la Faculté des Sciences ont apporté beaucoup de soins à la frappe et au tirage de cette thèse, je leur exprime tous mes remerciements.

TABLE DES MATIERES

+.+.+.+.+

Introduction p. 1

Chapitre I - Puissance de graphes. p. 4

§ 1 - Connexité et puissance de graphes p.4

§ 2 - Arc connexité p.10

§ 3 - Problèmes hamiltoniens forts et puissances de graphes p.21

Chapitre II - Joint d'une famille de graphes p. 28

§ 1 - Etude des invariants usuels p.28

§ 2 - Connectivité p.37

§ 3 - Problèmes hamiltoniens, partition en chaînes p.39

§ 4 - Cas particulier $H = K_p$ p.49

- Indices usuels p.49

- Problèmes eulériens p.56

- Problèmes hamiltoniens p.60

- Condition pour qu'un graphe soit le joint complet d'une famille de graphes p.63

§ 5 - Cas particulier $H = C_p$ p.64

§ 6 - Graphes irréductibles par joint p.67

Tableaux récapitulatifs des résultats sur les invariants p.69-70

Chapitre III - Cycles dans un graphe simple et problèmes hamiltoniens pseudo-cycles hamiltoniens p.71

§ 1 - Existence de cycles de longueurs supérieures ou égales à un entier donné, d'après le nombre d'arêtes p.71

§ 2 - Pseudo-cycles hamiltoniens dans un graphe simple p.77

Extensions possibles des résultats obtenus p.92

...

Chapitre IV - Graphes parfaits pour une propriété P, nombre et indice achromatiques p.94

§ 1 - Graphes parfaits pour une propriété P p.94

§ 2 - Nombre achromatique et graphes ψ-parfaits p.101

§ 3 - Indice achromatique et graphes ζ-parfaits p.105

Remarque sur le cas des graphes partiels p.114

Chapitre V - Coloration de l'hypergraphe des faces d'une triangulation d'une surface de caractéristique e p.117

§ 1 - Surface et immersion d'un graphe simple p.117

- Face d'une immersion, théorème de Youngs p.118

§ 2 - Hypergraphe : définitions et notations p.120

§ 3 - Nombre chromatique $\chi(H)$ de l'hypergraphe des faces d'une triangulation p.121

- Hypergraphe associé à une triangulation p.121
- Nombres de Heawood p.122
- Cas de la sphère p.123
- Cas du tore p.125
- Cas de la bande de Moëbius p.131

Annexe I Rappels de notions usuelles p.133

Annexe II Rappels de résultats concernant l'existence des cycles hamiltoniens dans un graphe simple et les puissances de graphes p.138

Bibliographie p.145

INTRODUCTION

+.+.+.+.+.+.+.+.+

Les résultats que nous présenterons ici ont trait plus particulièrement à deux domaines de la théorie des graphes.

Les problèmes hamiltoniens : dans le premier chapitre nous examinons des propriétés hamiltoniennes dans les puissances d'un graphe simple ou d'un 1-graphe ; le puissant théorème de Fleischner [20] n'a pas mis un point final dans cette voie et de nombreuses études restent à faire après lui sur les généralisations ultérieures du problème hamiltonien qui fut historiquement envisagé le premier ; le théorème 3 du chapitre I se situe dans cette ligne. Dans le chapitre 3 nous aborderons le problème d'existence d'un cycle hamiltonien d'un tout autre point de vue ; si de nombreuses généralisations de ce problème ont été faites il s'agit presque toujours de concepts plus forts que celui de graphe hamiltonien. M.Las Vergnas et J.C.Bermond [5] et [42] ont introduit une notion plus faible, de même que P.J.Slater et S.E.Goodman [55] et ce sont les seuls si l'on omet la question des graphes hypohamiltoniens qui est un peu à part. Le but du chapitre 3 sera donc d'introduire un indice s (G) "mesurant" la manière dont un graphe G s'éloigne d'un graphe hamiltonien et de donner des bornes de cet indice en fonction des paramètres usuels.

Les problèmes de connectivité : tout au long des différents chapitres plusieurs résultats sur la connexité seront exposés, théorèmes 1 et 2 du chapitre 1, propositions 1,2 du chapitre 2 et proposition 3 du chapitre 4.

Au chapitre 2, nous définirons une notion de joint d'une famille de graphes qui généralise celle de A.Zykov [59] ainsi que le concept connu de produit lexicographique de deux graphes, nous ferons une étude détaillée de cette notion en déterminant les invariants usuels : cardinal d'un couplage, nombre chromatique, nombre de stabilité etc ... Les principaux résultats de ce type sont regroupés dans les tableaux des pages 43, 44 du chapitre 2.

...

Pour terminer nous introduirons une notion de graphes P-parfaits inspirée par celle des graphes parfaits introduite par C. Berge [3] et nous montrerons que plusieurs classes de graphes P-parfaits sont des sous-classes de celle des graphes parfaits. Des propriétés de coloration des sommets ou des arêtes, dites achromatiques, seront présentées après l'introduction d'un indice achromatique $\zeta(G)$, qui permet de poser pour les colorations d'arêtes le même type de problèmes que ceux que Gupta a envisagé pour les colorations de sommets, dans [24].

Dans le dernier chapitre nous envisagerons le problème de coloration suivant : Si $\mathcal{C}$ est une triangulation d'une surface, on considère l'hypergraphe $H_{\mathcal{C}}$ associé dont les sommets sont ceux de la triangulation et dont les arêtes sont les triplets de sommets qui sont sommets d'une face de la triangulation .

Nous montrerons comment déterminer le nombre chromatique faible $\chi(H_{\mathcal{C}})$ de cet hypergraphe dans le cas où la surface a pour caractéristique d'Euler e (S) = 2 (sphère), e (S) = 1 (Bande de Moëbius) et e (S) = 0 (Tore)

Les notations employées seront celles de l'ouvrage de référence de C. Berge [4] auquel nous empruntons la terminologie.

Afin de faciliter la compréhension des premiers chapitres, on trouvera en annexe II p. 138 un rappel des principaux résultats concernant l'existence de cycles hamiltoniens dans les graphes simples et les diverses généralisations de ce problème qui ont été proposées.

Les définitions et notations de base sont rappelées en annexe I, p. 133

Plusieurs résultats ont déjà fait l'objet de publications :

J.L.JOLIVET Sur les puissances des graphes connexes. C.R.Acad. Sc. Paris t. 272 p. 107-109.

J.L.JOLIVET Sur la connexité des graphes orientés. C.R.Acad.Sc. Paris t.274 p.148 - 150 (1972).

J.L.JOLIVET Sur le joint d'une famille de graphes - Discrete Mathematics. Vol. 1973 p.145-158.

J.L.JOLIVET Le joint d'une famille de graphes : compte-rendu du colloque de l'Institut des Hautes Etudes de Bruxelles avril 1973.

J.L.JOLIVET The join of a family of graphs. Proceedings of the Colloquium held at Kesthely, Hungary , June 1973.

J.L.JOLIVET Indice de partition en chaînes d'un graphe simple et pseudo-cycles hamiltoniens. C.R.Acad.Sc.Paris t. 279 p. 479-482 (1974).

F.BORIES & J.L.JOLIVET, On complete colorings of graphs. Proceedings of the Colloquium held at Prague June 1974.

J.L.JOLIVET Pseudo-hamiltonian cycles in graphs. Proceedings of Fifth South Eastern Conference on Combinatorics in Boca-Raton (Floride, U.S.A.) 1974.

A.BOUCHET & J.L.JOLIVET, Nombre chromatique des hypergraphes associés aux triangulations d'une surface. A paraître.

Chapitre 1. PUISSANCE DE GRAPHES

Les graphes considérés dans ce chapitre seront orientés (sauf précision contraire), sans arcs multiples ni boucles. Si x est un sommet d'un graphe G, nous noterons $d^+(x)$ et $d^-(x)$ ses demi - degrés extérieurs et intérieurs, et $d^{\pm}(x)$ le plus petit des deux demi-degrés ; l'introduction de ce dernier invariant nous permettra de formaliser un résultat généralisant un théorème de G.T.CHARTRAND [14] sur l'arête-connectivité.

Plusieurs théorèmes porterons sur la notion suivante de puissance d'un graphe :

Définition 1

Soit G un graphe ayant n sommets et i un entier, nous appellerons puissance $i^{ème}$ du graphe G et nous noterons G^i le graphe obtenu en ajoutant à G les arcs (x,y) quand les deux sommets x et y vérifient $d(x,y) \leq i$.

Si G est un graphe simple la définition est toujours la même, d(x,y) est alors une distance au sens topologique du terme.

Si i est un entier compris entre 1 et $\delta(G)$ (diamètre de G) il est intéressant d'étudier les propriétés de G^i en fonction de celles de G ; pour $i \geq \delta(G)$, G^i est le graphe complet.

On trouvera en annexe II, § 3 un rapide historique de cette notion de puissances et les principaux théorèmes sur ce sujet.

§ 1 - Connexité et puissance de graphes

Un résultat essentiel sur la connectivité est celui de WITHNEY [56] MENGER [46]. Un graphe G est fortement k-connexe si et seulement si pour tout couple de sommets (a,b) il existe k chemins disjoints, sauf en a et b, allant de a à b.

On en trouvera une démonstration élégante dans [18] . Nous y ferons référence plusieurs fois dans la suite.

Le premier théorème donne une minoration de la connectivité de G^i connaissant la connectivité de G, il nécessite deux lemmes :

Lemme 1

Soit H un graphe ayant p sommets, réduit à un chemin élémentaire $\mathcal{C} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, pour tout entier $i \leq p - 1$ il existe i chemins disjoints de x_1 à x_p dans H^i.

Démonstration :

Soient k et r les entiers ≥ 0 vérifiant $p = k\,i + r$ et $r < i$, on construit les chemins cherchés de la manière suivante :

C_1 : $x_1, x_{i+1}, x_{2i+1}, \ldots, x_{ki+1}, x_p$

C_2 : $x_1, x_2, x_{i+2}, x_{2i+2}, \ldots, x_{ki+2}, x_p$

.....

C_r : $x_1, x_r, x_{i+r}, x_{2i+r}, \ldots, x_{(k-1)\,i+r}, x_p = x_{k\,i+r}$

C_{r+1} : $x_1, x_{r+1}, \ldots, x_r, x_{i+r+1}, \ldots, x_{(k-1)\,i+r+1}, x_p$

.....

C_{i-1} : $x_1, x_{i-1}, \ldots, x_{ki-1}, x_p$

C_i : $x_1, x_i, x_{2i}, \ldots, x_{k_i}, x_p$

D'où le résultat cherché.

Lemme 2

Soit G = (X, U) un graphe fortement connexe ayant n sommets, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout couple (a, b) de sommets il existe h chemins disjoints de G, sauf en a et b, allant de a à b.

ii) Pour tout couple (a, b) de sommets tels qu'il n'existe pas d'arc de a à b, il existe h chemins disjoints de G, sauf en a et b, allant de a à b.

Démonstration : *

Supposons que (ii) vérifiée pour G,et qu'il existe deux sommets a et b pour lesquels u = (a,b) est un arc de G,tels qu'il n'existe pas h chemins disjoints allant de a à b.

Dans G - u il n'y a donc pas (h-1) chemins disjoints de a à b,et donc il existe, d'après le théorème de Withney-Menger, un ensemble d'articulation S, séparant a et b, tel que $|S| < h - 1$.

Pour tout sommet c de $X - S - \{a,b\}$ les deux arcs (a,c) et (c,b) appartiennent à G, en effet :

- si $(a,c) \notin U$, il existe h chemins disjoints de G,sauf en a et c,allant de a à c, l'un d'eux au moins ne rencontre donc pas S, soit C ce chemin.

Nous sommes alors devant l'éventualité :

- ou bien:$(c,b) \in U$ et alors C + (c,b) est un chemin de G ne rencontrant pas S.

- ou bien:$(c,b) \notin U$, il existe h chemins disjoints, sauf en c et b, allant de c à b, l'un d'eux ne rencontre pas S, soit C'. De C + C' on extrait un chemin élémentaire allant de a à b et ne rencontrant pas S.

Dans les deux cas nous sommes conduit à la même contradiction et donc : $(a,c) \in U$.

De la même manière on montre que $(c,b) \in U$. Ainsi pour respecter nos hypothèses il vient $X - S - \{a,b\} = \emptyset$ et donc $S = X - \{a,b\}$ et $|S| = n - 2 \geq n - 1 - 1 \geq h - 1$,d'où la contradiction montrant l'absurdité de la supposition de départ.

Théorème 1

Soit G un graphe fortement h-connexe ayant n sommets,le graphe G^i est Min $\{n-1, h \cdot i\}$ - connexe.

---

* L'idée de cette démonstration est due à M.Las Vergnas pour le cas où G est un 1-graphe et non un graphe simple.

Démonstration

Supposons $h \cdot i \leq n - 1$.

Soient x et y deux sommets tels qu'il n'existe pas d'arcs (x,y) dans G^i. La distance d (x,y) dans G est donc strictement supérieure à i . G étant h connexe, il existe h chemins élémentaires de G : $C_1, C_2, \ldots, C_h$ allant de x à y et de longueur supérieure à i. D'après le lemme 1 nous pouvons construire dans chaque sous-graphe $(C_j)^i$ $j = 1, \ldots, h$, de G^i, i chemins disjoints allant de x à y, les sous-graphes $\{(C_j)^i\}$ $j = 1, \ldots, h$ ayant {a,b} pour intersection deux à deux; nous obtenons donc les h.i chemins cherchés.

Notons que si $i.h \geq n - 1$, l'existence de h chemins disjoints de longueurs supérieures à i entre a et b n'est pas possible dans G, puisqu'alors il y aurait h . i sommets différents de a et b dans G et que h . i + 2 est strictement supérieur à n ; cela signifie donc que tous les sommets de G^i sont adjacents et donc que G^i est le graphe complet symétrique; sa connectivité est alors n - 1.

Corollaire

Soit G un graphe simple, h connexe, et i un entier, alors G^i est Min {n - 1, h. i} - connexe.

Il suffit pour cela d'utiliser la méthode classique consistant à remplacer chaque arête de G par deux arcs de sens opposés. Le graphe obtenu est fortement h connexe, il suffit de lui appliquer le théorème 1 pour avoir l'énoncé du corollaire.

Remarque 1.

Dans le cas où G est simple et h = 1, on peut montrer que G^i est i connexe (pour $i \leq n - 1$) de la manière suivante, ne demandant que le premier lemme et non le second :

Supposons le résultat vrai pour les graphes ayant moins de n sommets ; par enlèvement successif d'arêtes ne déconnectant pas G extrayons un arbre T de G, alors :

- ou bien T n'a que deux sommets de degré 1 et le lemme donne le résultat.

- ou bien T a au moins trois sommets de degré 1, soient x,y,z, ces sommets. Pour tout couple (a,b) de sommets de T il y a au moins un des trois sommets, soit x par exemple,tel que : $a \neq x$ et $b \neq x$.

Considérons l'arbre T' obtenu en enlevant x à T. T' a n-1 sommets, d'après l'hypothèse de récurrence $(T')^i$ est donc i-connexe, pour $i \leq n-2$ et ainsi il existe i chaînes élémentaires disjointes de $(T')^i$, donc de G^i, reliant a et b.

Pour $i = n-1$, G^i est une clique et donc est i-connexe.

Remarque 2.

Si G est un graphe simple hamiltonien et i un entier tel que $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ G^i est 2 i-connexe.

En effet, si les sommets de G sont indexés selon un cycle hamiltonien $\mathcal{C} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, montrons que deux sommets x_1, x_j sont reliés par 2 i chaînes disjointes sauf en x_1 et x_j.

a) Si $j \geq i+1$, chacune des chaînes $x_1, x_2, \ldots, x_j$ et $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_1$ a une longueur supérieure à i, le lemme 1 permet de conclure immédiatement.

b) Si $j < i+1$ le sous-graphe H de G^i engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$ est donc une clique dans laquelle il existe j-1 chaînes disjointes sauf en x_1, x_j ayant ces deux sommets pour extrémités.

Si K est le sous-graphe engendré par $\{x_j, x_{j+1}, \ldots, x_1\}$ dans G^i, considérons les chaînes de K suivantes :

$[x_1, x_l, x_j]$ pour $l = n-i+j, n-i+j+1, \ldots, n$

d'une part,et d'autre part les j - 1 chaînes commençant par les arêtes (x_1, x_{n-l}) $l = i-j+1, \ldots, i-1$ et achevées en prenant les sommets de i

en i sur la chaîne $(x_1, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_j)$ et en terminant dès que possible (méthode analogue à celle du lemme 1).

Nous aurons ainsi construit les 2 i chaînes annoncées.

La démonstration précédente n'a d'intérêt que par ce qu'elle permet d'exhiber effectivement les chaînes reliant deux sommets de G^i, et non seulement d'en affirmer l'existence. On trouvera une présentation de ces deux dernières remarques dans [32].

Du corollaire du théorème 1,nous allons pouvoir déduire une majoration du diamètre de G^i à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 1

Soit G un graphe simple ayant n sommets, j-connexe et de diamètre $\delta(G) > 2$; alors $\delta(G) \leq \text{Max.}\{ n - 2j + 1 ; 3 \}$.

Démonstration

Soient $D = (x_1, x_2, \ldots, x_{\delta+1})$ un diamètre de G et K* le sous-graphe de G engendré par les sommets de $X - \{x_2, \ldots, x_\delta\}$. K a $n - \delta + 1$ sommets, d'autre part le diamètre $\delta(G)$ étant supérieur à 2, un sommet x quelconque de G ne peut être adjacent à x_1 et $x_{\delta+1}$ à la fois, ainsi nous avons :

$$d_K(x_1) + d_K(x_{\delta+1}) \leq n - \delta - 1.$$

D étant un diamètre de G,il n'existe pas d'arêtes de G joignant deux sommets x_1 et $x_{1'}$ de D tels que $|1 - 1'| > 1$, ainsi :

$$d_K(x_1) = d_G(x_1) - 1 \; ; \; d_K(x_{\delta+1}) = d_G(x_{\delta+1}) - 1$$

G étant j-connexe le degré de chaque sommet est supérieur ou égal à j et donc : $d_G(x_1) + d_G(x_{\delta+1}) \geq 2j$ d'où :

$$2j \leq d_G(x_1) + d_G(x_{\delta+1}) = d_K(x_1) + d_K(x_{\delta+1}) + 2 \leq n - \delta - 1 + 2$$

d'où la majoration de δ indiquée.

Proposition 2

Soit G un graphe simple ayant n sommets, j connexe, et de diamètre $\delta(G) > 2$; pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq \frac{\delta}{2}$ on a :

$$\delta(G^i) \leq \text{Min}\{ n - 2ij + 1 ; [\frac{\delta + i - 1}{i}] \}$$

Démonstration

Puisque i est un entier inférieur à $\frac{\delta}{2}$ on a $\delta(G^i) > 2$; le corollaire du théorème 1 affirme que G^i est ij-connexe. Nous pouvons alors appliquer la proposition précédente à G^i pour conclure :

$$\delta(G^i) \leq n - 2ij + 1$$

Par ailleurs, dans G^i, les sommets n_1 et $x_{\delta+1}$ sont reliés par la chaîne $(x_1, x_{i+1}, x_{2i+1}, \ldots, x_{ki+1}, x_{\delta+1})$ qui a pour longueur $[\frac{\delta+i-1}{i}]$, d'où la proposition.

§ 2 - Arc-connectivité

Nous donnerons tout d'abord un analogue du théorème de Withney-Menger pour l'arc connexité dû à Ford et Fulkerson [21]. Nous le formulerons à l'aide des notations de [4] qui sont les plus maniables pour traiter ce genre de problèmes.

Un graphe G = (X, U) fortement connexe étant donné, ainsi qu'une partie stricte non vide A de X nous noterons $m^+_G(A, X-A)$ le nombre d'arcs de G ayant leur origine dans A et leur extrémité dans X - A. Par ailleurs, si a et b sont deux sommets de X, notons $C^+_G(a,b)$ le nombre : $\text{Min}_{A \in \mathcal{A}} m^+_G(A, X-A)$ où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties strictes non vides de X contenant a et non b.

C. BERGE [4] démontre le résultat suivant en utilisant le théorème du flot maximum [21].

$C^+_G(a,b)$ est égal au nombre maximum de chemins arc-disjoints allant de a vers b. Ainsi il faut au moins enlever $\text{Min}_{\emptyset \neq A \neq X} m^+_G(A, X-A)$ arcs à G pour qu'il ne soit plus fortement connexe, et donc l'arc-connectivité de G est égale à ce nombre.

Cette formalisation va nous permettre de généraliser un résultat de G.T.Chartrand [14] sur l'arête-connectivité de graphes simples : si le degré minimum d'un graphe simple G est $d \geq \frac{n-1}{2}$, alors l'arête-connectivité de G est égale à d.

Théorème 2

Soit $G = (X, U)$ un graphe fortement connexe de diamètre $\delta \leq 2$, alors $\lambda(G) = \underset{x \in X}{\text{Min}}\ d^+(x)$.

Démonstration :

Si $\delta = 1$ le théorème est vérifié trivialement, nous supposerons donc $\delta = 2$ dans ce qui suit. Nous distinguerons deux cas suivant que $\underset{x \in X}{\text{Min}}\ d^+(x)$ est supérieur ou non à $\frac{n-1}{2}$.

Soit A une partie de X telle que $\lambda = m^+_G(A, X-A)$, alors si $|A| = 1$, A est réduit à un sommet, $\{a\} = A$ et alors $\lambda = m^+_G(\{a\}, X - \{a\})$; nous supposerons donc que $|A|$ et $|X - A|$ sont strictement supérieurs à 1.

Il est clair que : $\lambda \leq \underset{x \in X}{\text{Min}}\ d^+(x)$; supposons que G vérifie les hypothèses du théorème et que $\lambda(G)$ soit strictement inférieur à $\underset{x \in X}{\text{Min}}\ d^+(x)$:

I - Si $\underset{x \in X}{\text{Min}}\ d^+(x) \geq \frac{n-1}{2}$

1°) Si $|A| > \lambda$

En ce cas tous les sommets de X - A sont des sommets d'attachement, car dans le cas contraire, le diamètre de G serait supérieur ou égal à 3. Ainsi : $|X - A| \leq \lambda$ et $d^-_L(x) \geq 1$ pour tout x de X - A. (Si nous notons $d^-_L(x)$ (resp. $d^+_L(x)$) le nombre d'arcs d'attachement entre A et X-A ayant x pour origine (resp. extrémité)).

1°) α) - Si $|X-A| = \lambda$, alors $d^-_L(x) = 1$ pour tout x de X-A, donc pour un tel x :

$$\frac{n-1}{2} \leq d^-(x) = d^-_{X-A}(x) + d^-_L(x) \leq |X - A| - 1 + d^-_L(x).$$

Soit $d^-(x) \leq |X - A| = \lambda$, ce qui contredit notre hypothèse.

1°), β) - Si $|X - A| \leq \lambda$, alors $|X-A| < \lambda < |A|$

et donc : $|X-A| \leq \frac{n-2}{2}$ et $|A| \geq \frac{n+2}{2}$, de même que dans le cas précédent il vient :

(i) $\frac{n+1}{2} - |X-A| \leq d^-_L(x)$ pour tout x de X - A.

D'autre part, si x_o est un sommet de X - A tel que $d^-_L(x)$ soit minimum on a : $|X - A| \cdot d^-_L(x) \leq \lambda < |A|$ et donc :

(ii) $|X - A| \cdot d^-_L(x) \leq |A| - 1$. En combinant (i) et (ii) :

$$|X - A|^2 - |X - A| \frac{n+3}{2} + n - 1 \geq 0$$

pour $n > 5$ les racines du trinôme sont 2 et $\frac{n-1}{2}$ et donc $|X - A| \leq 2$.

Si $(X - A) = \{x_1, x_2\}$ alors :

$$\lambda = m_G(A, X-A) = d^-_L(x_1) + d^-_L(x_2)$$

$$\lambda \geq d^-(x_1) + d^-(x_2) - 2, \text{ d'où } \lambda \geq 2 \operatorname*{Min}_{x \in X} d^+(x) - 2$$

on a supposé $\lambda < \operatorname*{Min}_{x \in X} d^-(x)$ ce qui donne donc $\operatorname*{Min}_{x \in X} d^+(x) = 1$

et $\lambda = 0$, d'où la contradiction.

pour $n \leq 5$ on a $|X - A| \leq \frac{n-2}{2} \leq \frac{3}{2}$, et donc $|X - A| = 1$; ce qui est impossible.

2°) Si $|A| \leq \lambda$

Soit x_o un sommet de A, tel que $d^+_L(x_o)$ soit minimum; alors

$$d^+(x_o) = d^+_A(x_o) + d^+_L(x_o) \leq |A| - 1 + d^+_L(x_o) \leq \lambda - 1 + d^+_L(x_o)$$

par ailleurs $d^+(x_o) \geq \underset{x \quad X}{\text{Min}} \; d^+_-(x) \geq \lambda + 1$ et donc $d^+_L(x) \geq 2$,

ainsi $|A| \leq \frac{\lambda}{2} < \lambda$.

Des résultats précédents il vient donc :

$$d^+(x_o) \leq \frac{d^+(x_o) - 1}{2} - 1 + d^+_L(x_o),$$

soit $d^+_L(x_o) \geq \frac{d^+(x_o) + 3}{2}$. Nous savons que $|A| \geq 2$ alors :

$$\lambda = m_G(A, X-A) = \sum_{x \in A} d^+_L(x) \geq 2 \, . \, d^+_L(x_o) \geq d^+(x_o) + 3,$$

ce qui est impossible.

Le cas I ne peut donc se produire. Si G satisfait les hypothèses du théorème et que l'on a $\lambda < \underset{x \quad X}{\text{Min}} \; d^+_-(x)$ alors :

$$\text{II} - \underset{x \in X}{\text{Min}} \; d^+_-(x) < \frac{n-1}{2}$$

1°) Si $|A| \leq |X - A|$ alors $|A \leq \frac{n}{2}$ et $|X - A| \geq \frac{n}{2}$,

et donc :

$\lambda < \text{Min} \; d^+_-(x) < \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2} \leq |X - A|$, d'où $\lambda \leq |X - A| - 2$.

Le diamètre de G étant 2, $d^+_L(x)$ est non nul pour tout x de A, et donc $|A| \leq \lambda$.

Si $|A| = \lambda$, alors $d^+(x) = d^+_A(x) + 1 \leq \lambda$ pour tout x de A, ce qui est impossible.

Si $|A| < \lambda$, on a $\lambda \geq |A| \underset{x \quad A}{\text{Min}} \; d^+_{L-}(x)$,

donc :

$d^+(x_o) \leq |A| - 1 + d^+_L(x_o)$, soit $|A| \, d^+_L(x_o) \leq \lambda < d^+(x_o) \leq |A| - 1 + d^+_L(x_o)$;

d'où :

$$|A| \, d^+_L(x_o) \leq |A| - 2 + d^+_L(x_o) \text{ et } |A|(d^+_L(x_o) - 1) \leq d^+_L(x_o) - 2$$

pour tout sommet x_o de A tel que $d^+_L(x_o)$ soit minimum, ce qui est bien sûr impossible.

2°) Si $|A| > |X-A|$ on a $|A| \geq \frac{n+1}{2}$ et $|X-A| \leq \frac{n-1}{2}$,

d'où $\lambda < \underset{x \quad X}{\text{Min}} \; d^{+}_{-}(x) < \frac{n-1}{2} < \frac{n+1}{2} \leq |A|$, soit $\lambda \leq |A| - 2$; donc

$d^{-}_{L}(x) \geq 1$ pour tout x de X - A, puisque $\delta(G) = 2$, et par suite $|X-A| \leq \lambda$.

Si $|X-A| = \lambda$ alors $d^{-}_{L}(x) = 1$ pour tout x de X-A et alors pour $x \in X-A$ on a $d^{-}(x) = d^{-}_{L}(x) + d^{-}_{X-A}(x) \leq |X-A|-1 + d^{-}_{L}(x) \leq \lambda$, d'où la contradiction.

Si $|X-A| < \lambda$, soit x_o un sommet de X-A, tel que $d^{-}_{L}(x_o)$ soit minimum, alors $|X-A| \cdot d^{-}_{L}(x_o) \leq \lambda$, $d^{-}(x_o) \leq |X-A| - 1 + d^{-}_{L}(x_o)$ donc

$|X-A| \cdot d^{-}_{L}(x_o) \leq \lambda < d^{-}(x_o) \leq |X - A| - 1 + d^{-}_{L}(x_o)$,

d'où $|X-A|(d^{-}_{L}(x_o)-1) < d^{-}_{L}(x_o) - 1$, ce qui est encore impossible.

Au terme de cette laborieuse suite de raisonnements par l'absurde le théorème est donc démontré.

Corollaire 1

Soit G un graphe non orienté de diamètre inférieur ou égal à 2, l'arête connectivité λ de G vérifie : $\lambda = \underset{x \in X}{\text{Min}} \; d(x)$.

Considérons le graphe G* déduit de G par remplacement de chaque arête par deux arcs de sens opposés. Le théorème précédent donne alors :

$$\lambda(G^*) = \underset{x \in X}{\text{Min}} \; d^{+}_{-}{}_{G^*}(x) = \underset{x \in X}{\text{Min}} \; d_G(x)$$

il est aisé de vérifier que $\lambda(G^*) = \lambda(G)$, d'où le résultat cherché.

Corollaire 2

Soit G un graphe non orienté dont chaque sommet x vérifie :

$d(x) \geq \frac{n-1}{2}$, alors $\lambda = \underset{x \in X}{\text{Min}} \; d(x)$. (G.T.Chartrand)

Ceci découle du corollaire 1, puisque si $\underset{x \in X}{\text{Min}} \; d(x) \geq \frac{n-1}{2}$, alors $\delta(G) \leq 2$.

Corollaire 3 (Lynda Leshiak [43])

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple tel que :

$$[x,y] \notin E \Rightarrow d(x) + d(y) \geq n = |X|, \text{alors } \lambda(G) = \operatorname{Min}_X d_G(x).$$

Il est en effet immédiat de vérifier que tout graphe simple vérifiant les hypothèses du théorème a un diamètre inférieur ou égal à 2. Le corollaire 1 permet alors de conclure.

Inversement, pour tout $\lambda \geq 1$, il existe des graphes simples de diamètre 2 qui ne satisfont pas les hypothèses du corollaire 3, par exemple la chaîne élémentaire à 3 sommets pour $\lambda = 1$, le cycle élémentaire C_5 sans cordes pour $\lambda = 2$, et pour tout λ en général, les graphes ayant n sommets ($n > 2\lambda$), obtenu en joignant de toutes les façons possibles les sommets d'un stable de cardinal $n - \lambda$ à ceux d'une clique K_λ de cardinal λ.

Notons que ce corollaire 3 a été publié en 1974 sans que l'auteur ait eu apparemment connaissance du théorème 2 publié deux ans plus tôt.

Corollaire 4. (Abd El Kader 1974) [1]

Soit T_n un tournoi régulier, n impair, et $d^+(x) = d^-(x) = \frac{n-1}{2}$ pour tout x; alors pour tout couple (x,y) de sommets il existe exactement $\frac{n-1}{2}$ chemins de T_n arc-disjoints, ayant x et y pour extrémités.

Preuve :

1) Le diamètre de T_n est 2.

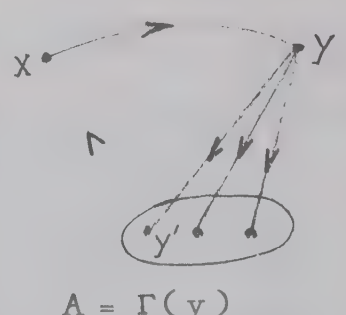
En effet pour x et y quelconques, s'il existe un arc $x \to y$ soit

$A = \Gamma(y) = \{y' \in X \text{ t.q } (y,y') \in U\}$

$|A| = \frac{n-1}{2}$ par hypothèse.

$\exists\, y' \in A$ tel que $(y',x) \in U$; sinon tous les arcs (x,y') seraient dans U et l'on aurait :

$$d^+(x) \geq |A| + 1, \text{ soit } d^+(x) \geq \frac{n+1}{2}.$$



$A = \Gamma(y)$

...

2) G est fortement connexe : évident d'après ce qui précède.

3) Le théorème 2 , p.8 donne donc : $\lambda(G) = \underset{X}{\text{Min}}\, d^{+}_{-}(x)$, soit $\lambda(G) = \frac{n-1}{2}$. D'après le théorème de Menger il existe donc $\frac{n-1}{2}$ chemins arc-disjoints ayant pour extrémités x et y et allant de x à y, pour tout couple (x,y) de X.

4) Puisque $d^{+}(x) = \frac{n-1}{2}$, on a au plus $\frac{x-1}{2}$ chemins arc-disjoints de x à y, d'où l'égalité cherchée.

Pour les tournois réguliers tels que $d^{+}(x) = d^{-}(x) = k < \frac{n-1}{2}$, on ne peut rien déduire sur le diamètre et le problème reste posé.

Proposition 3

Soit G = (X, E) un graphe simple connexe ayant un nombre de sommets n pair, alors $\nu(G^2) = \frac{n}{2}$.

Preuve :

Résultat vrai pour n = 2 , induction sur n. Soit T un arbre graphe partiel de G et P l'ensemble des sommets pendants de T , T_{X-P} est un arbre; s'il est réduit à un sommet, T est une étoile $K_{1,n-1}$ et T^2 est une clique, donc admet un couplage parfait. Si T_{X-P} a plus d'un sommet, considérons un de ses sommets pendants a :

1) Si a est adjacent à plusieurs sommets pendants de T, soient c et d deux d'entre eux; dans G on a $d(c,d) \leq 2$, donc $[c,d]$ est une arête de G^2 et $G^2_{X-\{x,y\}}$ est connexe de par le choix de c et d ; d'après l'hypothèse d'induction $(G_{X-\{x,y\}})^2$ admet un couplage parfait et l'adjonction de $[x,y]$ à celui-ci donne un couplage parfait de G^2.

2) Si a est adjacent à un seul sommet pendant b , $T_{X-\{a,b\}}$ est connexe et son carré admet un couplage parfait F ; $F \cup [a,b]$ est alors un couplage de G^2.

Corollaire

Si G est connexe, n impair, il y a un couplage presque parfait : $\nu(G^2) = \frac{n-1}{2}$. Il suffit de considérer un arbre graphe partiel de G auquel on enlève un sommet pendant.

Le théorème 2 va nous permettre de donner une minoration de l'arête connexité de la puissance i-ième d'un graphe. Auparavant nous démontrerons deux propositions concernant les degrés minimum dans G^i.

Proposition 4

Soit $G = (X,U)$ un graphe fortement connexe ayant n sommets, et p un entier tel que : $1 \leq p \leq n-1$; si $d^+(x) \geq p$ pour tout x de X (resp. $d^-(x) \leq p$); alors $d^+_{G^i}(x) \geq \text{Min}\{p+i-1, n-1\}$ pour tout x (resp. $d^-_{G^i}(x) \geq \text{Min}\{p+i-1, n-1\}$).

Démonstration :

Soit x un sommet de G, définissons $\Phi_j(x) = \{y \in X \mid d(x,y) = j\}$ pour $j = 1,2,\ldots, \delta(G)$ et $\Phi_0(x) = \{x\}$.

On a alors $|\Phi_1(x)| \geq p$ et $|\Phi_j(x)| \geq 1$ pour $2 \leq j \leq \delta(G)$.

Par ailleurs :

$$d^+_{G^i}(x) = \Big|\bigcup_{j=1}^{i} \Phi_j(x)\Big| \geq p+i-1$$

d'où la proposition.

Proposition 5

Soit $G = (X,E)$ un graphe simple ayant n sommets, vérifiant $\text{Min}_{x \in X} d(x) \geq p > 1$ pour un entier $p \leq n-1$; alors dans G_i on a :

$$\text{Min}_{x \in X} d_{G^i}(x) \geq \text{Min}\{n-1, (p-2)\left[\tfrac{i-1}{3}\right] + i-1+p\}.$$

Nous noterons $\varphi(i,p)$ ce dernier entier.

Démonstration :

Soit x un sommet de G, soit $\Phi_0(x) = \{x\}$ et $\Phi_j(x) = \{y \in X \mid d(x,y) = j\}$ pour $j = 1,\ldots, \delta(G)$; posons

$$\Omega_i(x) = \bigcup_{j=1}^{j=i} \Phi_j(x) \text{ , ainsi } |\Omega_i(x)| = d_{G^i}(x).$$

Il nous faut donc minorer $\Omega_i(x)$; pour ce faire posons :

$$T_1 = \bar{\Phi}_2(x) \cup \bar{\Phi}_3(x) \cup \bar{\Phi}_4(x) \quad \text{et} \quad T_j = \bar{\Phi}_{3j-1}(x) \cup \bar{\Phi}_{3j}(x) \cup \bar{\Phi}_{3j+1}(x)$$

pour $j = 1, 2, \ldots \left[\frac{\delta(G) - 1}{3}\right]$.

Dans $\bar{\Phi}_{3j}(x)$ il y a au moins un sommet de degré p, ainsi $|T_j(x)| \geq p+1$. On peut partitionner les sommets de $\Omega_i(x)$ de la manière suivante :

$$\Omega_i(x) = \bar{\Phi}_1(x) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\left[\frac{i-1}{3}\right]} T_j(x) \right) \cup R$$

où R est formé des sommets non regroupés dans trois ensembles $\bar{\Phi}_j(x)$ successifs (si $0 \not\equiv i - 1 \bmod 3$) ; d'où la majoration suivante :

$$d_i(x) = |\Omega_i(x)| \geq p + \left[\frac{i-1}{3}\right](p+1) + C_i,$$

où C_i est le reste de $i - 1 \bmod 3$; il vient donc :

$$d_i(x) \geq p + \left[\frac{i-1}{3}\right](p+1) + i - 1 - 3\left[\frac{i-1}{3}\right] = \left[\frac{i-1}{3}\right](p-2) + p + i - 1.$$

Proposition 6

Soit $G = (X, U)$ un graphe ayant n sommets et p un entier tel que $1 \leq p \leq n - 1$; si pour tout x on a $d^{\pm}(x) \geq p$, alors pour tout i tel que : $\frac{\delta(G)}{2} \leq i \leq \delta(G)$, on a $\lambda(G^i) \geq \text{Min}\{n - 1, i + p - 1\}$.

Démonstration :

Ayant $i \geq \frac{\delta(G)}{2}$, le diamètre $\delta(G^i)$ vérifie : $\delta(G^i) \leq 2$; le théorème 2 nous donne alors :

$$\lambda(G^i) = \min_{x \in X} d^{\pm}_{G^i}(x)$$

Nous pouvons minorer ce dernier nombre par $p + i - 1$ d'après la proposition [4] précédente, et donc: $\lambda(G^i) \geq \text{Min}\{n-1, i + p - 1\}$.

Proposition 7

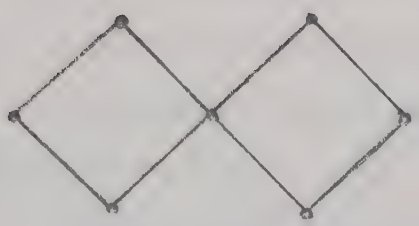
Soit $G = (X, E)$ un graphe simple ayant n sommets, et p un entier, $1 \leq p \leq n - 1$, vérifiant: $\min_{x \in X} d(x) \geq p$.

Alors pour tout i tel que: $\frac{\delta(G)}{2} \leq i \leq \delta$, on a $\lambda(G^i) \geq \varphi(i, p)$.

Démonstration :

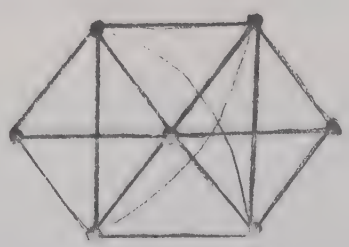
Elle est analogue à la précédente, en utilisant le corollaire 1 du théorème 2 au lieu du théorème lui-même, et la proposition 5 au lieu de la proposition 4 .

La proposition suivante est l'analogue du lemme 2 pour l'arc-connexité ; cependant elle ne peut être utilisée de la même manière que ce dernier pour trouver une minoration de l'arc-connexité de G^i. La difficulté d'obtention d'une telle minoration tient dans le fait suivant : s'il existe un faisceau de h-chemins arcs-disjoints de longueur supérieure à un entier i, entre deux sommets a et b, on ne peut déduire l'existence de h-i chemins arcs-disjoints dans G^i, alors que pour la connexité la déduction correspondante était immédiate. L'exemple suivant illustre ce fait :



G

$\lambda(G) = 2$



G^2

$\lambda(G^2) = 3$

Proposition 8

Pour un graphe $G = (X, U)$, h étant un entier $1 \leq h \leq n - 1$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout couple (a,b) de sommets de G il existe h chemins arc - disjoints qui ont a pour origine et b pour extrémité.

(ii) Pour tout couple (a,b) de sommets de G tels que $(a,b) \notin U$ il existe h chemins arc - disjoints qui ont a pour origine et b pour extrémité.

Démonstration :

Supposons qu'un graphe G vérifie (ii).

- Pour tout sommet x de G on a $d^+(x) \geq h$ et $d^-(x) \geq h$, en effet :

* $h \leq n - 1$, donc si x est un sommet tel que $d^+(x) = n - 1$, on a bien $d^+(x) \geq h$.

* Si x est un sommet tel que $d^+(x) < n - 1$; il existe un sommet y de X tel que : $(x,y) \notin U$, et donc d'après (ii) il existe h chemins arc - disjoints allant de x à y ; ces h chemins ont pour premiers arcs $(x,z_1),(x,z_2),\ldots,(x,z_h)$, avec des $(z_i)_{i=1,\ldots,h}$ tous différents, et donc $d^+(x) \geq h$. De même $d^-(x) \geq h$ pour tout x de X.

- Supposons qu'il existe un arc $(a,b) = u$ de G tel que a et b ne soient pas reliés par h chemins arc - disjoints. Dans G - u, a et b sont reliés par h - 2 chemins arc - disjoints au plus, donc : $C^+_G(a,b) \leq h - 2$ d'après le résultat rappelé ci-dessus.

Il existe donc un ensemble V d'arcs séparant a et b, de cardinal vérifiant: $|V| \leq h - 2$.

Soient $(a,z_1),(a,z_2),\ldots,(a,z_{h-1})$, h - 1 arcs ayant a pour origine dans G - u. Parmi les h-1 sommets $\{z_i\}_{i=1,\ldots,h-1}$, il y en a un au moins, z_1, tel que (z_1,b) ne soit pas un arc de G, sans quoi nous aurions h chemins arc - disjoints allant de a à b dans G.

De par (ii) il existe h chemins arc - disjoints allant de z_1 à b dans G, et donc h-1 au moins dans G - u ; l'un d'eux au moins, C, n'emprunte aucun arc de V qui comporte h-2 arcs au plus; cela contredit le fait que V sépare a et b dans G - u, puisqu'alors $(a,z_1) + C$ serait un chemin allant de a à b sans passer par V.

3 - Problèmes hamiltoniens forts et puissances de graphes

Dans ce paragraphe nous examinerons des propriétés hamiltoniennes "fortes" de la puissance d'un graphe non orienté. Vu le manque d'unité dans les définitions de différents articles, nous redéfinirons chaque notion avant de l'utiliser, en renvoyant le lecteur aux articles qui les ont introduites.

Définition

Soit G un graphe simple ayant n sommets et p un entier tel que $p \leq n-3$. Si pour tout entier $m \leq p$, l'enlèvement de m sommets quelconques de G laisse subsister un sous-graphe hamiltonien, nous dirons que G est p-hamiltonien [106].

Proposition 9

Soit G un graphe simple ayant n sommets, p-hamiltonien, et i un entier tel que $i \leq n - p - 3$, alors G^i est $(i + p)$-hamiltonien.

Démonstration :

Soient X l'ensemble des sommets de G, X' et X" des sous-ensembles de X vérifiant $X'' \subset X'$, $|X''| = p$, $|X'| = i + p$.

Le problème revient à montrer que le sous-graphe $G_{X-X'}$ est hamiltonien. D'après la définition donnée plus haut le sous-graphe $G_{X-X''}$ qui comporte n - p sommets est hamiltonien; indexons ses sommets le long d'un de ses cycles hamiltoniens $\mathcal{C} = [x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}]$.

Nous allons construire un cycle hamiltonien de $(G_{X-X'})^i$ à partir de $\mathcal{C}$:

1) Si tous les sommets de X'-X" ne sont pas consécutifs sur $\mathcal{C}$, on construit un cycle cherché en prenant les sommets de X-X' dans l'ordre d'apparition sur $\mathcal{C}$, les arêtes nécessaires appartiennent toujours à $(G_{X-X'})^i$ puisque toute suite de sommets de X'-X" consécutifs sur $\mathcal{C}$ a i-1 éléments au plus.

2) Si tous les sommets de X'-X" sont consécutifs sur $\mathcal{C}$,

$x_1, \ldots, x_i$ par exemple, nous formons un cycle cherché en prenant : $(x_{i+1}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+2k+1}, \ldots, x_n, x_{n-1}, x_{n-3}, \ldots, x_{n-2l+1}, \ldots, x_{i+2})$ si n et i ne sont pas de même parité, et $(x_{i+1}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+2k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n-2}, \ldots, x_{i+2})$ si i et n sont de même parité.

$(G_{X-X'})^i$ étant un sous-graphe partiel de G^i, nous avons bien le résultat escompté.

N.B. Le nombre i + p est bien le meilleur possible : un cycle élémentaire ayant n = 6 sommets par exemple est 0-hamiltonien et G^2 est 2-hamiltonien et non 3 hamiltonien comme on peut le vérifier aisément.

De manière analogue on peut étudier la propriété suivante :

Définition

Un graphe G = (X, E) est dit p-arête-hamiltonien si l'enlèvement de p arêtes quelconques de G laisse subsister un graphe partiel hamiltonien.

Remarque

Si G est p-arête-hamiltonien, G est (p + 2)-arête connexe.

Les théorèmes de Ore [51] et Posa [53] se traduisent de manière évidente par :

Proposition 10

Soit G = (X, E) un graphe simple ayant n sommets si pour tout couple (x,y) de sommets non adjacents on a : $d(x) + d(y) \geq n + p + 1$, alors G est p-arête-hamiltonien.

Proposition

Soit G = (X, E) un graphe simple ayant n sommets; pour un entier $p < n$ définissons $H_j = \{x \in X \mid d(x) \leq j\}$ pour $j = p+1, p+2, \ldots, \frac{n+2p-1}{2}$. Alors si $|H_j| < j - p$ pour $p+1 \leq j < \frac{n+2p-1}{2}$ et $|H_{\frac{n+2p-1}{2}}| \leq \frac{n+2p-1}{2}$, le graphe G est p-arête-hamiltonien.

...

Proposition 11

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, hamiltonien, ayant $n \geq 6$ sommets ; G^2 est 2-arête hamiltonien.

Démonstration :

Soit $\mathcal{C} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ un cycle hamiltonien de G selon lequel on indexe les sommets de G. Enlevons deux arêtes u et v à G^2 alors :

- ou bien aucune d'elles n'est une arête de $\mathcal{C}$ et $G^2 - \{u,v\}$ est hamiltonien,

- ou bien l'une d'elles, $u = [x_1, x_2]$, est une arête de $\mathcal{C}$ alors $[x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_1, x_n, x_2]$ ou bien $[x_2, x_4, x_5, \ldots, x_n, x_1, x_3, x_2]$ est un cycle hamiltonien de G - u,

- ou bien les deux arêtes u et v appartiennent à $\mathcal{C}$, $u = [x_1, x_2]$ et $v = [x_i, x_{i+1}]$ pour simplifier les notations. Deux cas sont alors possibles :

Si i = 2 on considère le cycle :

$$\mathcal{C}' = [x_2, x_4, x_3, x_5, x_6, \ldots, x_{n-1}, x_1, x_n, x_2]$$

et si i > 2 le cycle :

$$\mathcal{C}'' = [x_2, x_3, \ldots, x_i, x_{i+2}, x_{i+1}, x_{i+3}, \ldots, x_{n-1}, x_1, x_n, x_2]$$

Dans les deux cas nous avons donc construit un cycle hamiltonien de $G - \{u,v\}$, donc G^2 est bien 2-arête hamiltonien.

On peut montrer par les mêmes techniques que G^3 est 3-arêtes-hamiltonien, ce qui incite à formuler la conjecture suivante :

Conjecture

Soient $G = (X, E)$ un graphe simple hamiltonien et i un entier inférieur strictement à $n/2$, alors dans le graphe G^i l'enlèvement de i arêtes quelconques laisse subsister un graphe partiel hamiltonien.

Le dernier résultat de ce chapitre concernera la notion suivante introduite par H.V.Kronk [41].

$G = (X, E)$ étant un graphe simple nous dirons qu'il possède la propriété P_k si toute chaîne élémentaire de G, de longueur inférieure ou égale à k, est inclue dans un cycle hamiltonien.

Les graphes possèdant la propriété P_{n-2} ont été complètement caractérisés [13] . Diverses généralisations ont été élaborées, notamment [57], [39], [41].

La plus intéressante des généralisations est celle de C. Berge [4] chapitre 10, de graphe q-hamilton connecté .

Théorème 3

Soient G un graphe simple hamiltonien et $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ un entier, le graphe G^i possède la propriété $P_{2(i-1)}$ et ce résultat est le meilleur en un certain sens que l'on précisera.

Preuve :

Pour $G = C_n$ cycle élémentaire ayant n sommets $[x_1, \ldots, x_n] = C_n$ et $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ considérons $P = [x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_{2i+1}]$ dans G^i, chaîne élémentaire de longueur 2 i - 1 ; P ne peut être inclue dans un cycle hamiltonien de G puisque le sommet x_{i+1} n'est adjacent dans G^i qu'à des sommets de P. Donc G^i ne possède pas la propriété P_{2i-1}. La propriété $P_{2(i-1)}$ est donc en ce sens la "meilleure" possible pour G^i.

Indexons X selon un cycle hamiltonien de G : $\mathcal{C} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Soit P une chaîne élémentaire de longueur $k \leq 2(i-1)$ dont nous désignerons les deux extrémités par a et b dans la suite.

Un sommet z étant donné, nous noterons s (z) et p (z) les premiers sommets de X - P rencontrés en décrivant $\mathcal{C}$ à partir de z dans le sens de l'indexation et dans le sens opposé.

Nous allons construire un cycle $\mathcal{C}'$, hamiltonien dans G^i et incluant P, ce qui établira bien notre théorème. Certains cas particuliers ne présentant aucune difficulté seront laissés de côté délibérément. Nous décrirons tout d'abord deux procédés de construction de chaînes qui seront utilisés

dans la suite ; tous les indices seront exprimés modulo n.

Deux sommets x_j et x_k étant donnés, considérons les sommets $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\alpha}$ n'appartenant pas à P, dans leur ordre d'indexation sur $\mathcal{C}$, rencontrés en décrivant le cycle de x_j à x_k.

* Posons :

$$Q = \begin{cases} [x_j, x_{j_2}, x_{j_4}, \ldots, x_{j_\alpha}, x_{j_{\alpha-1}}, \ldots, x_{j_1}] & \text{si } \alpha \text{ est pair} \\ [x_j, x_{j_2}, x_{j_4}, \ldots, x_{j_{\alpha-1}}, x_{j_\alpha}, x_{j_{\alpha-2}}, \ldots, x_{j_1}] & \text{si } \alpha \text{ est impair} \end{cases}$$

Si deux sommets consécutifs de la suite sont à une distance inférieure ou égale à i dans G, Q est une chaîne élémentaire de G^i que nous noterons $A_1^+ [x_j, x_k]$ et dont le dernier sommet est $s(x_j)$. De la même manière nous noterons $A_1^- [x_j, x_k]$ la chaîne élémentaire obtenue par ce procédé en décrivant $\mathcal{C}$ dans le sens inverse de l'indexation. On peut construire $A_1^+ [x_j, x_k]$ si pour tout indice j_β pair avec $\beta \leq \alpha - 1$ il y a au moins 2 sommets de X - P parmi les sommets $\{x_{j_\beta} + 1, x_{j_\beta} + 2, \ldots, x_{j_\beta} + i\}$ et si pour tout indice j_β impair avec $\beta > 1$ il y a au moins 2 sommets de X - P parmi les sommets $\{x_{j_\beta} - 1, x_{j_\beta} - 2, \ldots, x_{j_\beta} - i\}$.

* Si dans la suite $\{x_j, x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_\alpha}, x_k\}$ deux sommets sont à une distance inférieure ou égale à i sur $\mathcal{C}$, nous noterons $A_2^+ [x_j, x_k]$ la chaîne élémentaire $[x_j, x_{j_1}, \ldots, x_{j_\alpha}, x_k]$. Si l'on prend les sommets dans le sens inverse de l'indexation, on obtient de même une chaîne élémentaire notée $A_2^- [x_j, x_k]$.

Dans la construction de $\mathcal{C}'$ distinguons trois cas :

1) Il existe une suite de i sommets de P consécutifs sur $\mathcal{C}$.

Notons S la suite de sommets de P consécutifs sur $\mathcal{C}$, et supposons que $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k'}\}$ ce qui ne restreint pas la généralité du raisonnement. P a 2i-1 sommets au maximum, il y a donc au plus i-1 sommets de P n'appartenant pas à S, alors :

a) Si les sommets de P sont répartis entre deux suites S et S' ayant respectivement i et (k-i+1) sommets consécutifs sur $\mathcal{C}$:

$S = \{x_1, \ldots, x_i\}$ et $S' = \{x_1, x_{l+1}, \ldots, x_n\}$ avec $m = l+k-i$

- ou bien l'on a : $a \in S$ et $b \in S'$, en ce cas on pose :

$$\mathcal{C}' = [a, x_{i+1}] + A_2^+ [x_{i+1}, x_{m+1}] + A_1^+ [x_{m+1}, x_1] + [x_{m+2}, b] + P$$

si $m + 1 \neq n$ et

$$\mathcal{C}' = [a, x_{i+1}] + A_2 [x_{i+1}, x_{m+1}] + [x_{m+1}, b] + P \quad \text{si } m + 1 = n ,$$

- ou bien l'on a $a \in S'$, $b \in S'$, a précédant b sur $\mathcal{C}$.

On pose :

$$\mathcal{C}' = P + A_1^- [a, x_k] + [x_{l-1}, x_{m+1}] + A_1^+ [x_{m+1}, x_1] + [x_{m+2}, b]$$

- ou bien l'on a: $a \in S$, $b \in S$, a précédant b sur $\mathcal{C}$.

On pose :

$$\mathcal{C}' = P + A_2^+ [b, a] .$$

b) Les sommets de P ne forment pas de suite de plus de i - 2 sommets différente de S.

- ou bien $a \in S$ et $b \in S$, on construit $\mathcal{C}'$ comme précédemment :

$$\mathcal{C}' = P + A_2^+ [b, a]$$

- ou bien $a \notin S$ et $b \notin S$, on construit $\mathcal{C}'$ de la façon suivante :

$$\mathcal{C}' = P + A_1^+ [b, x_1] + [s(b), p(b)] + A_2 [p - b), s(a)]$$
$$+ A_1^- [s(a), x_k] + [p(a), a]$$

- ou bien $a \in S$ et $b \notin S$.

Supposons que l'on ait par exemple $|\mathcal{C}[b, x_n] \wedge P| \geq |\mathcal{C}[x_k, b] \wedge P|$; posons :

$$\mathcal{C}' = P + A_1^- [b, x_k] + [p(b), s(b)] + A_2^+ [s(b), a]$$

...

2) Il n'existe pas de suite de plus de i-1 sommets de P consécutifs sur $\mathcal{C}$; mais il en existe une, S, de (i-1) sommets exactement.

a) S'il existe une deuxième suite S' de (i-1) sommets de P consécutifs sur $\mathcal{C}$ que l'on note $S' = \{x_1, \ldots, x_m\}$ comme précédemment.

- ou bien a et b appartiennent à S par exemple.

Posons :

$$\mathcal{C}' = P + A_2^+ [b, a]$$

- ou bien $a \in S$ et $b \in S'$

Posons :

$$\mathcal{C}' = P + A_1^-[b, x_k - 1] + [x_{l-1}, x_{m+1}] + A_2^+ [x_{m+1}, a]$$

- ou bien $a \in S$ et $b \notin S \cup S'$; supposons que l'unique sommet b de $P - (S \cup S')$ soit situé sur $\mathcal{C}$ entre x_m et x_1. Posons :

$$\mathcal{C}' = P + A_1^+[b, x_1] + [s(b), p(b)] + A_2^- [p(b), a]$$

b) S est la seule suite de (i-1) sommets de P consécutifs sur le cycle $\mathcal{C}$: on procède de manière analogue à celle utilisée au 1) b).

3) S'il n'existe pas de suite de (i-1) sommets de P consécutifs sur $\mathcal{C}$, supposons que $|P \cap \mathcal{C}[a,b]| \geq |P \cap \mathcal{C}[b,a]|$ par exemple, il y a donc au plus i - 2 sommets de P sur $\mathcal{C}[b,a]$, on peut donc construire :

$$\mathcal{C}' = P + A_1^+ [b,a] + [s(b); p(b)] + A_2^- [p(b), a]$$

Dans tous les cas - aux symétries du problème près - nous avons donc construit le cycle $\mathcal{C}'$ cherché.

Chapitre 2. JOINT D'UNE FAMILLE DE GRAPHES

+.+.+

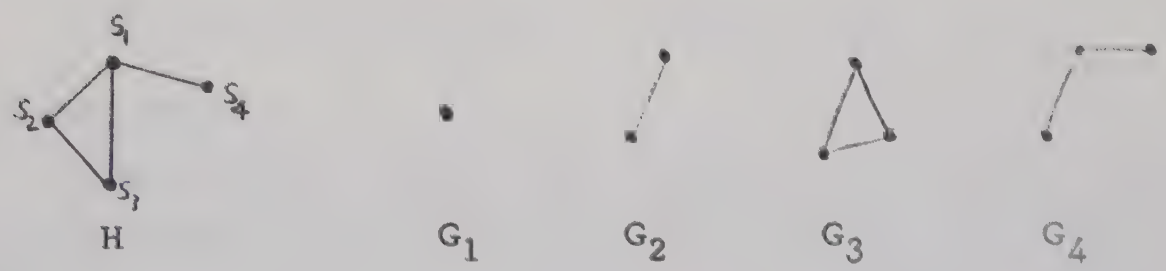
Dans ce chapitre, nous supposerons donnée une famille $\mathcal{F}$ de $p \geq 2$ graphes simples $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ dont les ensembles de sommets seront notés $(X_i)_{i=1,\ldots,p}$ et les ensembles d'arêtes $(E_i)_{i=1,\ldots,p}$. Nous poserons $|X_i| = n_i$ et $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$. Nous supposerons également donné un graphe simple H ayant p sommets $\{s_1, s_2, \ldots, s_p\} = S$ indexés de 1 à p.

Définition 1

On appelle joint de la famille indexée $\mathcal{F}$ selon le graphe H indexé et l'on note $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$ le graphe simple ayant pour ensemble de sommets $\bigcup_{i=1}^{p} X_i$ (union disjointe) et pour arêtes : [x,y] arête de $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$ si et seulement si x et y sont deux sommets adjacents d'un même graphe G_i, ou bien s'ils appartiennent à des graphes G_i et G_j différents et que s_i et s_j sont adjacents dans H.

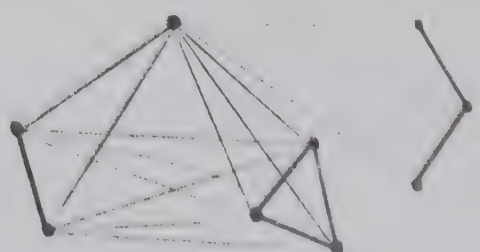
Nous noterons X et E les ensembles de sommets et d'arêtes de $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Exemple : Si H, G_1, G_2, G_3, G_4 sont donnés par :



H $\quad$ G_1 $\quad$ G_2 $\quad$ G_3 $\quad$ G_4

le joint $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,4}$ est :



Lorsque nous considérerons le cas où H est la clique ayant p sommets, nous noterons $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ le joint des graphes G_i en omettant de préciser selon quel graphe est réalisé le joint.

Lorsque nous considérerons un indice quelconque relatif aux graphes (nombre chromatique, indice de partition en cliques etc...),nous l'indexerons par H s'il est relatif au graphe H et par $j \in \{1,\ldots,p\}$ s'il est relatif au graphe G_j, sans indexation il sera relatif à $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Le degré d'un sommet $x \in X_i$ sera noté $d_i(x)$ dans G_i et $d(x)$ dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

§ 1 - Etude des invariants usuels

L'indice de partition en cliques d'un graphe simple est le plus petit nombre de sous-graphes qui sont des cliques et réalisent une partition de l'ensemble des sommets du graphe ; il est noté habituellement θ. Pour le déterminer en fonction des θ_i de chaque G_i, nous examinerons tout d'abord le cas où le graphe H est la clique ayant p sommets :

Lemme

Pour $H = K_p$ le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie $\theta = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}}\ \theta_i$.

Démonstration :

Soient $K_1, K_2, \ldots K_\theta$ des cliques formant une partition de X, de cardinal minimum. Les traces $K_j \cap G_i$ de ces cliques sur les sous-graphes $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ sont des cliques telles que les familles $\{K_j \cap G_i\}_{j=1,\ldots,\theta}$ forment des partitions en cliques des X_i ; ainsi pour tout i on a : $\theta \geq \theta_i$ donc $\theta \geq \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}}\ \theta_i$

Inversement, supposons par commodité que les G_i soient indexés de telle manière que les θ_i soient décroissants.

Soient $\{(K_i^j)_{j=1,\ldots,\theta_i}\}_{i=1,\ldots,p}$ des partitions minimum en cliques des ensembles X_i, dans chaque G_i. Complétons chaque partition formellement en posant $K_i^j = \emptyset$ pour $j = \theta_i + 1, \ldots, \theta_1$.

Pour tout j considérons les joints $j(K_i^j)_{i=1,\ldots,p}$; nous obtenons θ_1 sous-graphes de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ qui sont des cliques et partitionnent X ; ainsi $\theta_1 \geq \theta$, d'où le lemme.

Proposition 1

Si la famille $\mathcal{F}$ est indexée de telle sorte que $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \ldots \geq \theta_p$, le graphe $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie :

$$\text{Max}\{\theta_1, \theta_H\} \leq \theta \leq \sum_{j=1}^{\theta_H} \theta_j$$

Démonstration

Soit $L_1, \ldots, L_{\theta_H}$ une partition minimum en cliques de H ; chaque sous-graphe $\overline{L}_j$ (engendré dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ par les G_i tels que s_i soit un sommet de L_j) a un indice $\overline{\theta}_j = \text{Max}\{\theta_i \mid s_i \in L_j\}$ d'après le lemme, puisque :

$$\overline{L}_j = J_{L_j}(G_i)_{i \mid s_i \in L_j} \quad \text{et donc} \quad \theta \leq \sum_{j=1,\ldots,\theta_H} \overline{\theta}_j = \sum_{j=1}^{\theta_H} \overline{\theta}_j .$$

D'où $\theta \leq \sum_{j=1}^{\theta_H} \theta_j$, qui est la majoration indiquée.

Deux sommets d'un même graphe G_i, non adjacents dans G_i, ne peuvent être dans une même clique de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et donc $\theta \geq \theta_1$.

Soit $\mathcal{M} = M_1, M_2, \ldots, M_\theta$ une partition en cliques de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$; considérons pour un $i \in \{1,\ldots,p\}$ donné l'ensemble S_i :

$$S_i = \{ s_j \in S \mid X_j \cap M_i \neq \emptyset \}$$

...

Les ensembles ainsi définis forment un recouvrement de S. Il est clair que l'on peut en déduire une partition ayant un nombre d'éléments inférieur ou égal à θ puisque les cliques sont stables par intersection;ainsi $\theta_H \leq \theta$.

Proposition 2

Si la famille $\mathcal{F}$ est indexée de telle sorte que $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_p$, $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie $\gamma_1 \leq \gamma \leq \sum_{j=1}^{\gamma_H} \gamma_j$, où γ désigne le nombre chromatique.

Démonstration

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_{\gamma_H}$ les couleurs d'une coloration minimale de H ; pour $j = 1, \ldots, \gamma_H$ définissons $S_j = \{ s \in S \mid s \in C_j \}$ et soit g_j le maximum de $\{ \gamma_i \mid s_i \in S_j \}$.

Dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ l'ensemble $X'_j = \bigcup_{i \mid s_i \in S_j} X_i$ peut donc être colorié en g_j couleurs.

Nous obtenons ainsi une coloration de X qui a $\sum_{j=1}^{\gamma_H} g_j$ couleurs;de par l'indexation de $\mathcal{F}$ il vient donc $\gamma \leq \sum_{i=1}^{\gamma_H} \gamma_i$.

Les deux propositions suivantes ont trait aux indices ω et ω' qui désignent respectivement le cardinal maximum d'une clique et le cardinal minimum d'une clique maximale.

Proposition 3

Si la famille $\mathcal{F}$ est indexée de telle sorte que $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_p$, le joint $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie :

$$\sum_{j=1}^{\omega_H} \omega_j \leq \omega \leq \sum_{j=1}^{p} \omega_j$$

Démonstration

Soit K une clique maximum de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$; elle induit sur chaque G_i une clique $K_i = K \cap G_i$ qui est maximale dans G_i : en effet, si K_i n'était pas maximale pour un certain indice i, il existerait un sommet x de X_i tel que $K'_i = K_i \cup \{ x \}$ soit une clique de G_i et alors le sous-graphe $J_H(K_1, K_2, \ldots, K_{i-1}, K'_i, K_{i+1}, \ldots, K_p)$ de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ serait une clique contenant strictement K.

L'ensemble des sommets de K est l'union des ensembles de sommets des K_i et donc $\omega \leq \sum_{i=1}^{p} \omega_i$.

Considérons maintenant une clique maximum M de H, ayant donc ω_H sommets $\{s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{\omega_H}}\}$; soient $M_{i_1}, M_{i_2}, \ldots, M_{i_{\omega_H}}$ des cliques maximum de $G_{i_1}, \ldots, G_{i_{\omega_H}}$; le sous-graphe $J_M(M_{i_1}, \ldots, M_{i_{\omega_H}})$ de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est bien sûr une clique.

Si X_{i_j} est l'ensemble des sommets de M_{i_j} on a :

$\omega \geq \sum_{j=1}^{\omega_H} |X_{i_j}|$, soit $\omega \geq \sum_{j=1}^{\omega_H} \omega_{i_j}$, et donc $\omega \geq \sum_{j=1}^{\omega_H} \omega_j$, puisque les ω_i sont indexés par ordre croissant.

Proposition 4

Si la famille $\mathcal{F}$ est indexée de telle sorte que $\omega'_1 \geq \omega'_2 \geq \ldots \geq \omega'_p$, le joint $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie :

$$\sum_{i=1}^{\omega'_H} \omega'_{p-i+1} \leq \omega' \leq \sum_{i=1}^{\omega_H} \omega'_i$$

Démonstration

Soit K une clique maximale, de cardinal minimum, de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$,

...

et soient $G_{i_1}, \ldots, G_{i_j}$ les sous-graphes auxquels appartiennent ses sommets. $s_{i_1}, \ldots, s_{i_j}$ forment une clique M de H, cette clique est maximale puisque dans le cas contraire, si s_k est un sommet de H tel que $s_k \cup \{ s_{i_1}, \ldots, s_{i_j} \}$ engendrent une clique de H, il suffit de considérer un sommet z quelconque de X_k pour obtenir $\{z\} \cup K$ qui engendre une clique contenant strictement K. Ainsi $\omega'_H \leq j \leq \omega$.

Considérons les sous-graphes $\{K \cap G_{i_1}\}_{l=1,\ldots,j}$, ce sont des cliques des G_{i_1}. $K \cap G_{i_1}$ est une clique maximale de cardinal minimum de G_{i_1}; en effet, supposons qu'il existe un sommet $x \in X_{i_1} - K$ tel que $\{x\} \cup (K \cap G_i)$ engendre une clique de G_{i_1}, nous aurions alors une clique K' engendrée par $K \cup \{x\}$ dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$, qui contiendrait strictement K.

Si $K \cap G_{i_1}$ n'était pas de cardinal minimum en tant que clique maximale de F_{i_1}, il existerait une telle clique K'_{i_1} et $J((K \cap G_{i_m})_{\substack{m=1,\ldots,j \\ m \neq 1}} ; K'_{i_1})$ serait une clique maximale de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ de cardinal inférieur à celui de K. En conséquence, $|X(K)| = \sum_{l=1}^{j} \omega'_{i_1}$ et donc :

$$\sum_{i=1}^{\omega'_H} \omega'_{p-i+1} \leq \omega' \leq \sum_{i=1}^{\omega_H} \omega'_i$$

Dans les deux propositions 5 et 6 nous donnons des encadrements des valeurs de α et α' qui désignent respectivement le cardinal d'un ensemble stable (sans arêtes) maximum, et le cardinal minimum d'un ensemble stable maximal.

Proposition 5

Si la famille $\mathcal{F}$ est indexée de telle sorte que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_p$, le nombre de stabilité α de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ satisfait :

$$\sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_{p-j+1} \leq \alpha \leq \sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_j$$

...

Démonstration

Considérons un ensemble stable maximum S' de H ,

$S' = \{ s_{l_1}, \ldots, s_{l_{\alpha_H}} \}$. Soit $S'_{l_1}, \ldots, S'_{l_{\alpha_H}}$ des ensembles stables maximum de $G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_{\alpha_H}}$. Dans $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$ ces ensembles de sommets engendrent un ensemble stable R ayant un cardinal égal à :

$\sum_{j=1}^{\alpha_H} |S'_{l_j}|$. Puisque $|S'_{l_j}| = \alpha_{l_j}$ on a donc :

$\sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_{l_j} \leq \alpha$, d'où $\sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_{p-j+1} \leq \alpha$.

Par ailleurs, si T est un ensemble stable de $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$, soit $S' = \{ s_i \in S \mid X_i \cap T \neq \emptyset \}$; S' est un ensemble stable de H, donc $|S'| \leq \alpha_H$. Pour tout $i = 1,\ldots,p$, $T_i = T \cap X_i$ est un ensemble stable de G_i, donc $|X(T_i)| \leq \alpha_i$; ainsi $|X(T)| \leq \sum_{i=1}^{\alpha_H}$, d'où la majoration cherchée.

Proposition 6

Si la famille $\mathcal{F}$ est indexée de telle sorte que $\alpha_1 \geq \alpha_2 \ldots \geq \alpha_p$, $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie :

$$\sum_{j=1}^{\alpha'_H} \alpha'_{i_j} \leq \alpha' \leq \sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_j$$

Démonstration

La majoration est une conséquence immédiate de la proposition 5 précédente puisque $\alpha' \leq \alpha$. Montrons que $\sum_{j=1}^{\alpha'_H} \alpha'_{i_j} \leq \alpha'$.

Soit σ un ensemble stable maximal de cardinal minimum dans $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$. Soit $\sigma' = \{ s_j \in S \mid X_j \cap \sigma \neq \emptyset \}$.

Il est clair que σ' est un ensemble stable de H ; il est maximal . En effet, si un sommet s_i de H engendrait avec σ' un ensemble stable dans H, pour un sommet z quelconque de G_i , σ et z engendreraient dans $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$ un ensemble stable contenant strictement σ , et donc $\alpha'_H \leq |\sigma'| \leq \alpha_H$.

...

Soit $\sigma_i = X_i \cap \sigma$; c'est un stable de G_i qui est maximal, puisque si $\sigma_i \cup \{x\}$ était un ensemble stable de G_i nous aurions un ensemble stable $\sigma \cup \{x\}$. Ainsi, $\sigma_i \geq \alpha'_i$ et donc $\sum_{i \mid s_i \in \sigma'} \alpha'_i \leq \alpha'$, d'où la minoration cherchée, puisque nous avons considéré une indexation des α'_i selon les valeurs décroissantes.

Le nombre d'absorption d'un graphe simple est le cardinal minimum d'un absorbant de ce graphe; nous le noterons $\beta(G)$. Rappelons qu'un ensemble $A \subset X$ est un absorbant de G si tout sommet x de X est adjacent à au moins un sommet de A. On trouvera dans [30] et [31] une étude de cet invariant.

Proposition 7

Si la famille G_i est indexée de telle sorte que $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_p$, le joint $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie $\beta_H \leq \beta \leq \text{Min} \{2\beta_H, \sum_{j=1}^{\beta_H} \beta_j\}$.

Démonstration

Soit S' un absorbant de $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$; définissons T par $T = \{s_i \in S \mid S' \cap X_i \neq \emptyset\}$. T est non vide et c'est un absorbant de H; en effet, soit s_j un sommet de H et y un sommet de G_j pour un indice $1 \leq j \leq p$ quelconque; il existe un sommet x de S' tel que [x,y] soit une arête de E. Soit l l'indice tel que x appartienne à X_l, alors $[s_j, s_l]$ est une arête de H ; x est un sommet de $X_l \cap S'$ et donc s_l est dans T qui est donc absorbant de H. Ainsi $\beta_H \leq |T| \leq |S'| \leq \beta$.

Si $T' = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_{\beta_H}}\}$ est un absorbant de H, de cardinal minimum, soient $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{\beta_H}}$ des absorbants de $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_{\beta_H}}$, l'ensemble $(\bigcup_{j=1}^{\beta_H} S_{i_j})$ est un absorbant de $J_H (G_i)_{i=1,\ldots,p}$; en effet si x est un élément de X, soit l l'indice tel que x soit un sommet de G_l, T' étant

...

un absorbant de H, il existe k tel que $[s_k, s_l]$ soit une arête de H et s_k est un sommet de T' ; ainsi pour un z quelconque de S_k, $[z,x]$ est une arête de E et donc :

$$\left| \bigcup_{j=1}^{\beta_H} S_{i_j} \right| \leq \sum_{j=1}^{\beta_H} |S_{i_j}| \leq \sum_{j=1}^{\beta_H} \beta_j$$

Il nous reste maintenant à montrer que : $\beta \leq 2\,\beta_H$.

Soit T un absorbant de H, $T = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_{\beta_H}}\}$, soit T' un ensemble de β_H sommets de H $s_{i'_1}, \ldots, s_{i'_{\beta_H}}$ tels que pour tout indice $j = 1,2,\ldots,\beta_H$ $[s_{i_1}, s_{i'_1}]$ soit une arête de H. Pour tout $j = 1,2,\ldots,\beta_H$ considérons un sommet x_{i_j} de G_{i_j} et un sommet $x_{i'_j}$ de $G_{i'_j}$, l'ensemble Y défini par :

$$Y = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{\beta_H}}, x_{i'_1}, x_{i'_2}, \ldots, x_{i'_{\beta_H}}\}$$

est un absorbant de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$:

Soit x un élément de X et l l'entier tel que x soit un sommet de G_l, alors :

1) Si $l \neq i_1, i_2, \ldots, i_{\beta_H}$, il existe j tel que $[s_l, s_{i_j}]$ soit une arête de H, et donc $[x, x_{i_j}]$ est une arête de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

2) S'il existe j tel que $l = i_j$, $[x_{i_j}, x]$ est une arête de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Nous avons donc $|Y| = 2\ \beta_H$, d'où la proposition.

Corollaire

Si le rayon ρ de H est 1, alors $\beta \leq 2$.

En effet, si s_i est un centre de H, soit s_j un sommet de H adjacent à s_i ; tout ensemble $\{x,y\}$ de sommets de X_i et X_j respectivement, est un absorbant de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ comme on le vérifie immédiatement.

Proposition 8

Si l'un des graphes H, G_1, ..., G_p n'est pas complet, le diamètre δ

...

de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est $\delta = \text{Max}\{2 ; \delta_H\}$.

Démonstration

Si H est le graphe complet, alors $\delta_H = 1$ et $\delta = 2 = \text{Max}\{2 ; \delta_H\}$; nous supposerons donc $H \neq K_p$ dans la suite.

Soient s_i et s_j deux sommets non adjacents de H; il n'existe pas d'arête $[x,y]$ pour tous les sommets x de X_i et y de X_j, il faut donc montrer $\delta = \delta_H$.

Soient x et y des sommets appartenant respectivement à X_i et X_j avec $i \neq j$; on a $d_H(s_i, s_j) \leq \delta_H$, soit donc : $s_i = s_{i_o}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_k} = s_j$ une chaîne de longueur $k \leq \delta_H$ minimale reliant s_i et s_k dans H.

Dans chaque X_{i_l}, pour $l = 1, 2, \ldots, k-1$ choisissons un sommet x_{i_l} ; $[x, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k-1}}, y]$ est une chaîne de longueur $k \leq \delta$ dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et donc $\delta \leq \delta_H$.

Inversement pour deux sommets quelconques s_i et s_j de S soient x_i et x_j des sommets de X_i et X_j respectivement; dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ on a $d(x_i, x_j) \leq \delta$. Soit $x_i = y_o, y_1, \ldots, y_l = x_j$ une chaîne de longueur minimale joignant x_i et x_j dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et soient $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ les indices tels que y_m soit un sommet de X_{i_m} pour $m = 1, 2, \ldots, l-1$.

$\sigma = \{ s_i, s_{i_1}, \ldots, s_{i_{l-1}}, s_j \}$ est une suite de sommets de H où un même sommet figure éventuellement plusieurs fois. En supprimant une ou plusieurs occurences successives d'un même sommet de telle sorte que tous soient différents, nous obtenons une suite σ' engendrant une chaîne de longueur $q \leq l \leq \delta$ dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$, et donc $\delta_H \leq \delta$.

§ 2 - Connectivité

Proposition 1

Si H est h-connexe et que $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_p$, le joint $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$

vérifie :

$$\left(\sum_{i=1}^{i=h} n_i\right) \leq k(J_H) \leq \sum_{i=1}^{i=h} n_{p-i+1}$$

Démonstration

Soient $x \in X_i$ et $y \in X_j$ pour $i \neq j$, deux sommets de X ; dans H s_i et s_j sont reliés par au moins h chaînes disjointes sauf en s_i et s_j, d'après le théorème de Withney-Menger : $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_h$.

Une chaîne $\mathcal{C}_d$ de H induit $\text{Min}\{ n_f \mid s_f \in \mathcal{C}_d - \{s_i, s_j\} \}$ chaînes disjointes ayant pour extrémités x et y dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$; en effet, si t est un sommet de G_{i_1} et u de G_{i_2} pour s_{i_1} et s_{i_2} voisins sur $\mathcal{C}_d$, l'arête $[s_{i_1}, s_{i_2}]$ est dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Ainsi, x et y sont reliés par au moins $\sum_{i=1}^{h} n_i$ chaînes disjointes de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Soient x et y deux sommets d'un même ensemble X_i. Le degré $d_H(s_i)$ est supérieur ou égal à h; soient $s_{i_1}, \ldots, s_{i_h}$, h sommets de H, adjacents à s_i, x et y sont tous deux adjacents à tous les sommets de $\bigcup_{l=1}^{h} X_{i_l}$, ce qui constitue donc $\sum_{l=1}^{h} n_{i_l}$ chaînes de longueur 2, d'où la première inégalité.

Pour i et j tels que s_i et s_j soient reliés par exactement h chaînes de H, deux sommets, $x \in X_i$ et $y \in X_j$, sont reliés par

$$\sum_{d} \text{Min}\{ n_f \mid s_f \in \mathcal{C}_d - \{ s_i, s_j \} \} \text{ chaînes}$$

exactement et donc la connectivité de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est inférieure ou égale à $\sum_{i=1}^{i=h} n_{p-i+1}$, d'où le résultat.

Proposition 2

Si le diamètre de H vérifie $\delta_H \leq 2$, l'arête connexité λ de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est égale au degré minimum des sommets de X.

...

Démonstration

Elle est immédiate; en effet, d'après la proposition 8 du § 1, le diamètre δ de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est 2 si l'un des graphes est non complet (cas trivial);le corollaire du théorème 2 du chapitre I permet alors de conclure.

§ 3 - Problèmes hamiltoniens, partition de X en chaînes

Un graphe $G = (X, E)$ étant donné,nous notons $\pi(G)$ le cardinal minimum d'une partition de X en chaînes élémentaires ; l'introduction et l'étude de cet indice nous permettrons de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le joint de deux graphes (cas où $H = K_2$) soit hamiltonien. Nous donnerons ensuite des conditions sur $\mathcal{F}$ et H pour que $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ soit hamiltonien.

Théorème 1

Soient G_1 et G_2 deux graphes tels que $\pi(G_1) \geq \pi(G_2)$ alors :

a) $J(G_1, G_2)$ est hamiltonien si et seulement si $\pi(G_1) \leq n_2$.

b) $J(G_1, G_2)$ possède une chaîne hamiltonienne si et seulement si $\pi(G_1) \leq n_2 + 1$.

c) si $\pi(G_1) > n_2 + 1$, $\pi(J(G_1, G_2)) = \pi(G_1) - n_2$.

Démonstration

a) - Si $J(G_1, G_2)$ est hamiltonien, soit $\mathcal{C}$ un de ses cycles hamiltoniens, il induit sur X_1 une partition en chaînes élémentaires $C_1, \ldots, C_q$ et donc $q \geq \pi(G_1)$. Sur $\mathcal{C}$, les extrémités des chaînes C_i sont adjacentes à des sommets de X_2,et donc $q \leq n_2$,d'où $n_2 \leq \pi(G_1)$.

- Inversement, si l'on a $n_2 \geq \pi(G_1)$ il existe une partition de X_2 en $\pi(G_1)$ chaînes élémentaires : Soit $C_1, C_2, \ldots, C_{\pi(G_2)}$ une partition de cardinal minimum ; enlevons $\pi(G_1) - \pi(G_2)$ arêtes à cet ensemble

de chaînes (ce qui est possible puisque $n_2 \geq \pi(G_1)$), la nouvelle partition obtenue a bien $\pi(G_1)$ éléments : $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{\pi(G_1)}$, ce qui est possible puisque toutes les arêtes de liaison sont dans le joint.

b) - Si $\pi(G_1) \leq n_2 + 1$, on construit une chaîne hamiltonienne de $J(G_1, G_2)$ par le procédé employé précédemment.

- Si $J(G_1, G_2)$ possède une chaîne hamiltonienne $\mathcal{C}$, elle induit sur X_1 des chaînes $C_1, \ldots, C_q$ avec $q \geq \pi(G_1)$; par ailleurs, sur $\mathcal{C}$, ces chaînes ont $(q-1)$ extrémités adjacentes à des sommets de X_2, et ainsi $\pi(G_1) \leq q \leq n_2 - 1$.

c) Supposons maintenant que $\pi(G_1) > n_2 + 1$. D'après les questions précédentes $\pi(J(G_1, G_2)) \geq 2$.

Considérons une partition de X_1 en chaînes, ayant un nombre $\pi(G_1)$ d'éléments : $C_1, C_2, \ldots, C_{\pi(G_1)}$. Si nous notons $\{x_i\}_{i=1,\ldots,n_2}$ les sommets de G_2, nous pouvons construire une chaîne $\mathcal{C} = C_1, x_1, C_2, x_2, \ldots, x_{n_2} C_{n_2+1}$, contenant $n_2 + 1$ chaînes de G_1 et tous les sommets de G_2 ; $\{\mathcal{C}, C_{n_2+2}, \ldots, C_{\pi(G_1)}\}$ forme une partition de $X_1 \cup X_2$ en $(\pi(G_1) - n_2)$ chaînes élémentaires de $\pi(G_1, G_2)$, et donc : $\pi(J(G_1, G_2)) \leq \pi(G_1) - n_2$.

Le problème est maintenant de montrer que toute partition de $X_1 \cup X_2$ a au moins $\pi(G_1) - n_2$ éléments ; pour cela, soit $C_1, \ldots, C_q$ une partition P de $X_1 \cup X_2$ dans $J(G_1, G_2)$, avec q minimum.

Les sommets qui sont extrémités des chaînes C_i sont tous dans X_1 ou tous dans X_2, car dans le cas contraire, en ajoutant une arête liant deux extrémités de chaînes, on pourrait diminuer le cardinal de la partition.

- toutes les extrémités de chaînes sont dans X_1 :

Supposons qu'elles soient toutes dans X_2. Chaque chaîne C_i induit sur X_1 et X_2 des chaînes de G_1 et G_2 : $C_i = C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^{k_i}$ où

C_i^{2h+1} est une chaîne de G_2 et C_i^{2h} une chaîne de G_1 (on convient d'appeler chaîne un sommet, la longueur de la chaîne étant 0), ainsi les nombres $\{k_i\}_{i=1,\ldots,q}$ sont impairs.

Pour la partition $P = C_1, C_2, \ldots, C_q$ on a ainsi :

$\sum_{i=1}^{q} (\frac{k_i + 1}{2})$ chaînes partitionnant X_2 et $\sum_{i=1}^{q} (\frac{k_i - 1}{2})$ chaînes élémentaires partitionnant X_1, et donc :

$$\sum_{i=1}^{q} (\frac{k_i + 1}{2}) \leq n_2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{q} (\frac{k_i - 1}{2}) \geq \pi(G_1)$$

et

$$\sum_{i=1}^{q} k_i \leq 2n_2 - q \qquad \sum_{i=1}^{q} \geq 2\pi(G_1) + q$$

ce qui contredit l'hypothèse $\pi(G_1) > n_2 + 1$.

- si deux chaînes C_i et C_j de la partition P contiennent des sommets de X_2, soit $C_i = C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^{k_i-1}, C_i^{k_i}$ et x le dernier sommet de $C_i^{k_i-1}$, considérons les deux chaînes :

$$C'_i = C_i^{k_i} \qquad C'_j = C_i^1, \ldots, C_i^{k_i-1}, C_j^1, \ldots, C_j^{k_j} .$$

C'_j est bien une chaîne de $J(G_1, G_2)$: $C_i^{k_i-1}$ et C_j^1 sont reliés par une arête $[x,y]$, si y est le premier sommet de C_j^1.

Il est clair, que par itération de ce procédé, on déduit de la partition P une partition P' telle que tous les sommets de X_2 soient sur la même chaîne, C_1 par exemple, P' ayant le même nombre d'éléments que P. Pour les raisons exposées dans le b), P a au moins $\pi(G_1) - n_2$ éléments et donc $\pi(J(G_1, G_2)) \geq \pi(G_1) - n_2$. c.q.f.d.

Après quelques corollaires de ce théorème nous donnerons deux conditions suffisantes pour que $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ soit hamiltonien, portant sur les G_i et l'existence de graphes partiels de H d'un type particulier.

...

Corollaire 1

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple et soit p le plus petit entier positif ou nul tel que le joint $J = J(G, K_p)$ soit hamiltonien, où K_p est la clique de p sommets ; alors $\pi(G) = \text{Max } \{1, p\}$.

Démonstration

Si G a une chaîne hamiltonienne, $\pi(G) = 1$ et $p = 0$ ou 1; ainsi la formule de l'énoncé est bien vérifiée. Si G n'a pas de chaîne hamiltonienne, $\pi(G) > \pi(K_p)$; d'après le théorème 1, l'entier minimum de l'énoncé est donc $\pi(G)$.

Corollaire 2

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, si $K(G)$ désigne sa connectivité, on a : $\pi(G) \leq \text{Max } \{ 1 ; \alpha(G) - K(G)\}$

Démonstration

Si $\alpha(G) \leq K(G)$, le théorème d'Erdös-Chvatal assure que G est hamiltonien et donc que $\pi(G) = 1$. [19]

Dans le cas contraire posons $p = \alpha(G) - K(G)$ et considérons le graphe $J = J(G, K_p)$.

La connectivité de J est $p + K(G)$, en effet tout ensemble d'articulation A de J contient K_p et $A \cap X$ est un ensemble d'articulation de G, et donc :

$$K(J) \geq |A \cap X| + p \geq K(G) + p$$

Inversement, si B est un ensemble d'articulation de G de cardinal minimum $K(G)$, $B \cup K_p$ est un ensemble d'articulation de J, d'où $K(J) \leq K(G) + p$.

Le nombre de stabilité de J est celui de G : les seuls stables de cardinal supérieur à 1 sont ceux de G. Le théorème d'Erdös-Chvatal cité ci-dessus assure que J est hamiltonien et le corollaire 1 permet de conclure.

Corollaire 3

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple dont les sommets sont indexés par

...

ordre croissant $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Si p est un entier tel que

$k < p < n$ et $d_k \leq k - p \Rightarrow d_{n-p} - k \geq n - k$, alors $\pi(G) \leq \text{Max}\{1,p\}$

Démonstration

Le graphe $J = J(G, K_p)$ aura pour suite des degrés :

$$d'_1 \leq d'_2 \leq \ldots \leq d'_n \leq d'_{n+1} \leq \ldots \leq d'_{n+p}$$

où

$d'_i = d_i + p$ $(i = 1,\ldots,n)$ et $d'_i = n + p - 1$ $(i = n+1,\ldots,n+p)$

qui vérifie :

$$k < \frac{n+p}{2} \text{ et } d'_k \leq k \Rightarrow d'_{n+p-k} \geq n + p - k$$

Cette suite vérifie les hypothèses du théorème de Chvatal [16] et G est donc hamiltonien.

Corollaire 4

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple et soit $H_k = \{x \in X \text{ t.q. } d(x) \leq k\}$. S'il existe un entier p tel que $|H_k| < k + p$ pour $1 \leq p < \frac{n+p-1}{2}$, et $|H_{\frac{n+p-1}{2}}| \leq \frac{n+p-1}{2}$ si $n + p$ est impair, alors $\pi(G) \leq \text{Max}\{1,p\}$.

La démonstration est identique aux précédentes en utilisant le théorème de Posa [53] ; de même avec les résultats de Ore [51] ;

Corollaire 5

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, $\pi(G)$ vérifie :

$$\pi(G) \leq \text{Max}\{1 ; \underset{[x,y] \notin E}{\text{Max}}[n - d_G(x) - d_G(y)]\}$$

Corollaire 6

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple; si $r(G)$ est le cardinal minimum d'une partie $F \subset E$ telle que tout sommet x soit extrémité d'au moins une arête de E (couverture des sommets par les arêtes), on a :

$$r(G) \leq \frac{n + \pi(G)}{2} \leq \frac{n + \alpha(G) - K(G)}{2}$$

En effet, si $C_1, C_2, \ldots, C_{\pi(G)}$ est une partition de X en chaînes élémentaires de longueurs $l_1, l_2, \ldots, l_{\pi(G)}$ et que $C_i = [x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{l_i+1}]$ pour $i = 1, 2, \ldots \pi(G)$, on obtient simplement un recouvrement des sommets

...

par les arêtes $[x_i^j , x_i^{j+1}]$ $j = 1,3,\ldots,l_{i-1}$, l_i si l_i pair, et $j = 1,3,\ldots,l_i$ si l_i impair ; pour $i = 1,2,\ldots, \pi(G)$. Cette couverture a pour cardinal

$$c \leq \sum_{i=1}^{\pi(G)} \frac{l_i}{2} + 1 \text{ donc } r(G) \leq c \leq \frac{n + \pi(G)}{2} .$$

La deuxième inégalité provient directement du corollaire 2, les différents autres corollaires donnent chacun des majorations de $r(G)$ immédiatement.

La méthode précédente pour ramener l'étude de $\pi(G)$ à un problème hamiltonien est très simple ; elle s'applique de la même manière pour des graphes orientés où 1- graphe :

Si $\pi(G)$ désigne le nombre minimum de chemins du 1-graphe G partitionnant l'ensemble X des sommets, et si $J(G, K_p^*)$ désigne le 1-graphe obtenu en ajoutant àG une clique orientée symétrique de p sommets et tous les arcs de liaison possibles entre G et K_p^*, on a :

Proposition 3

Soit $G = (X,U)$ un 1-graphe, son indice $\pi(G)$ de partition en chemins élémentaires vérifie :

$$\pi(G) \leq \text{Max} \{ 1 ; [\tfrac{1}{2} (2n - 1 - \text{Min } A(x,y))]^* \}$$

où

$$A(x,y) = d^+(x) + d^-(x) + d^+(y) + d^-(y)$$

le minimum étant pris pour tous les couples de sommets non adjacents.

Démonstration

Posons :

$$p = [\tfrac{1}{3} (2n - 1 - \text{Min } A(x,y))]^*$$

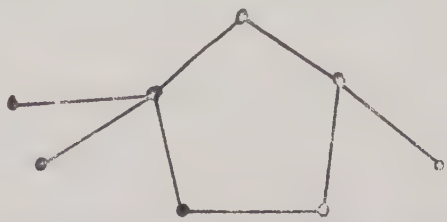
le crochet désignant la partie entière par excès .

Le 1-graphe $J(G, K_p^*)$ vérifie les hypothèses du théorème de H.Meyniel [48] et donc possède un circuit hamiltonien qui induit sur G une partition en $p' \leq p$ chemins élémentaires.

Nous appellerons arbre total de H un graphe partiel qui est un arbre, et, nous appellerons soleil un graphe formé d'un cycle élémentaire C et de sommets pendants extérieurs à ce cycle :

Exemple

Le graphe suivant est un soleil ayant 8 sommets :



Lemme

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, $\pi(G)$ son indice de partition en chaîne et n son nombre de sommets; pour tout entier r vérifiant : $\pi(G) \leq r \leq n$, il existe une partition de X en r chaînes élémentaires.

Démonstration

Soit r un entier vérifiant les hypothèses du lemme, et soit $C_1, C_2, \ldots, C_{\pi(G}$ une partition de X en $\pi(G)$ chaînes élémentaires disjointes. Enlevons $r - \pi(G)$ arêtes à cet ensemble de chaînes, nous obtenons une partition en r chaînes disjointes, de X.

Théorème 2

Si H contient un arbre total T tel que pour tout $i = 1, \ldots, p$ on ait : $\pi(G_i) \leq d_T(s_i) \leq n_i$, alors $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Démonstration

D'après le lemme, nous savons que pour un graphe G_i la condition du théorème implique l'existence de $d_T(s_i) = \mu_i$ chaînes partitionnant X_i : $C^i_1, \ldots, C^i_{\mu_i}$. En particulier, pour un sommet pendant s_j de T la condition implique l'existence d'une chaîne hamiltonienne.

Nous décrivons maintenant une construction faisable à partir d'un

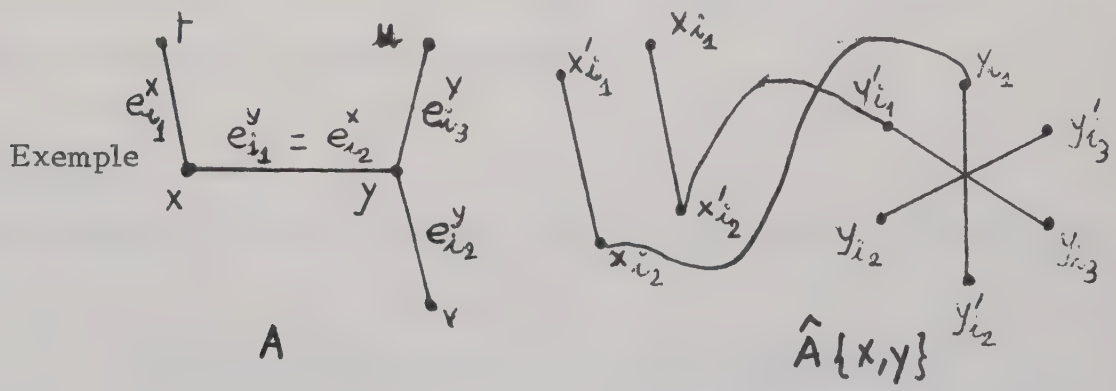
...

arbre A quelconque, nous l'appliquerons ensuite à T. Indexons les arêtes de A : $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de manière arbitraire; si x est un sommet quelconque adjacent aux arêtes $e^x_{i_1}, e^x_{i_2}, \ldots, e^x_{i_{d(x)}}$ nous remplaçons x par 2. d(x) sommets $x_{i_1}, x'_{i_1}, x_{i_2}, x'_{i_2}, \ldots, x_{i_{d(x)}}, x'_{i_{d(x)}}$, puis nous considérons le graphe $\hat{A}$ ayant les 2 m sommets indexés comme il vient de l'être indiqué et pour arêtes nous prenons :

$$[x_{i_1}, x'_{i_2}], [x_{i_2}, x'_{i_3}] \ldots [x_{i_k}, x'_{i_{k+1}}]$$

où les indices sont donnés modulo d(x), d'une part, et d'autre part, pour deux sommets x et y adjacents dans A, il existe deux indices $1 \leq l \leq d(x)$ et $1 \leq l' \leq d(y)$ tels que $e^x_{i_l} = e^y_{i_{l'}}$; nous prenons $[x_{i_l}, y_{i_{l'}}]$ et $[x'_{i_l}, y_{i_{l'}}]$ pour arêtes de $\hat{A}$.

$\hat{A}$ a donc 2 m sommets de degrés 2; montrons qu'il est connexe :



Considérons deux sommets x_{i_j} et x'_{i_j} obtenus par remplacement d'un sommet x quelconque, mais non pendant, de A. Ces deux sommets sont reliés par une chaîne de $\hat{A}$; en effet, si nous supprimons les deux arêtes $[x_{i_j}, y'_{i_k}]$ et $[x'_{i_j}, y_{i_k}]$ de $\hat{A}$ (où y est un sommet adjacent à x dans A et $[y'_{i_k}, x_{i_j}]$ $[x'_{i_j}, y_{i_k}]$ les arêtes correspondantes dans $\hat{A}$), x_{i_j} et x'_{i_j} appartiennent tous les deux à $\hat{A}_1$ par exemple, si nous notons ainsi les transformés des deux sous-arbres A_1 et A_2 obtenus par suppression de l'arête [x,y] de A ; y_{i_k} et y'_{i_k} appartiennent alors tous deux à A_2.

Il est clair que x_{i_j} et x'_{i_j} qui sont les deux seuls sommets de degré impair de $\hat{A}_1$ appartiennent à la même composante connexe de $\hat{A}_1$, donc de $\hat{A}$.

Ainsi les sommets $\{x_{i_1}, \ldots, x'_{i_{d(x)}}\}$ de $\hat{A}$ provenant d'un même sommet x de A appartiennent à la même composante connexe de $\hat{A}$.

Soient u et v deux sommets quelconques de $\hat{A}$ provenant de deux sommets x et y différents dans A. Il existe une unique chaîne $\mathcal{C}$ de A reliant x et y, elle induit une ou plusieurs chaînes élémentaires reliant u et v dans $\hat{A}$, ces sommets sont donc dans une même composante connexe de $\hat{A}$; d'où la connexité de $\hat{A}$. Le graphe $\hat{A}$ est donc connexe et tous ses sommets sont de degré 2, il est donc hamiltonien.

Considérons maintenant le transformé $\hat{T}$ de l'arbre total T de H; nous obtiendrons un cycle hamiltonien de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ en remplaçant les arêtes de $\hat{T}$ ayant des extrémités provenant d'un même sommet x_i, par les chaînes partitionnant X_i dans le graphe G_i.

Théorème 3

Si le graphe H contient un sous-graphe partiel H' qui est un soleil tel que :

(i) Tout sommet d'articulation s_i de H' est tel que :

$$\pi_i \leq \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \ldots + \pi_{i_k} + 1 \leq n_i$$

si $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}$ sont les sommets pendants du soleil adjacents à s_i.

(ii) Si $d_{H'}(s_1) = 2$ alors $\pi_1 = 1$

(Nous notons $\pi(G_i) = \pi_i$ dans cet énoncé.)

$J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Démonstration

Pour chaque sommet d'articulation s_i de H', soient $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}$ les sommets pendants de H' adjacents à s_i, et G_i^* le graphe qui est l'union disjointe de $G_{i_1}, \ldots, G_{i_k}$. L'indice $\pi(G_i^*)$ est donc :

$$\pi(G_i^*) = \pi_{i_1} + \pi_{i_2} + \ldots + \pi_{i_k}$$

la condition (i) signifie qu'il existe une partition en chaînes élémentaires de X_i ayant $\pi(G_i^*) + 1$ élément.

Par le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 1 nous "raccordons" les $\pi(G_i^*)$ chaînes de G_i^* avec les $\pi(G_i^*) + 1$ chaînes de G_i obtenant ainsi une chaîne hamiltonienne du graphe engendré par $(\bigcup_{j=1}^{k} X_{i_j}) \cup X_i$ dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$. Soit $\mathcal{C}_i$ cette chaîne ayant ses deux extrémités x_i et x'_i dans G_i. Nous obtenons un cycle hamiltonien de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ en considérant toutes les chaînes analogues à $\mathcal{C}_i$: $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_q$ si q est la longueur du cycle C du soleil H', $C = s_1, \ldots, s_q$, et en les reliant par les arêtes $[x'_i, x_{i+1}]$ (modulo q).

Théorème 4

Si H est hamiltonien et qu'il existe un entier r tel que $\pi(G_i) \leq r \leq n_i$, pour tout $i = 1, \ldots, p$, le joint $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Démonstration

Considérons, par commodité, que H est indexé suivant un de ses cycles hamiltoniens $\mathcal{C} = [s_1, \ldots, s_p]$. Chaque graphe G_i admet une partition en r chaînes élémentaires d'après le lemme : $C^i_1, C^i_2, \ldots, C^i_r$; ayant pour extrémités x^i_j et y^i_j pour la chaîne C^i_j. Un cycle hamiltonien de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est obtenu en prenant :

$$\mathcal{C} = C^1_1 + C^2_1 + \ldots + C^p_1 + C^1_2 + \ldots + C^p_{r-1} + C^1_r + C^2_r + \ldots + C^p_r$$

§ 4 - Etude du cas particulier $H = K_p$

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction de ce chapitre, nous ne rappellerons pas dans la notation du joint que $H = K_p$, nous noterons $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ le joint de la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ selon la clique K_p.

Le lemme 1 du § 1 donne la valeur exacte de θ : $\theta = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}}\ \theta_i$.
Nous appliquons maintenant les résultats de ce paragraphe au cas particulier $H = K_p$.

- La valeur de $\gamma(K_p)$ est p et donc : $\underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}}\ \gamma_i \leq \gamma \leq \sum_{j=1}^{p} \gamma_i$, d'après la proposition 2. Si nous considérons une coloration en un nombre minimum de couleurs de X, elle induit sur chaque X_i une coloration de G_i en γ'_i couleurs avec $\gamma'_i \geq \gamma_i$. Deux sommets n'appartenant pas au même graphe G_i sont adjacents dans $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et donc $\gamma = \sum_{i=1}^{p} \gamma'_i \geq \sum_{i=1}^{p} \gamma_i$.

Ainsi : $\gamma = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i$.

- La valeur de ω_{K_p} est p ainsi $\omega = \sum_{i=1}^{p} \omega_i$ d'après la proposition 3.

- La valeur de ω'_{K_p} est p également donc $\omega' = \sum_{i=1}^{p} \omega'_i$ de par la proposition 4.

- α_{K_p} et α'_{K_p} sont tous les deux égaux à 1. α et α' sont donc majorés par $\underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}}\ \alpha_i$.

Un ensemble stable dans l'un des G_i est stable dans le joint $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et donc $\alpha = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}}\ \alpha_i$ et $\alpha' = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Min}}\ \alpha'_i$.

- Le nombre d'absorption β_{K_p} est 1, ainsi $1 \leq \beta \leq 2$ d'après la proposition 7, le cas $\beta = 1$ se produisant si et seulement si l'un des β_i est égal à 1.

- Si l'un des graphes $G_1, \ldots, G_p$ n'est pas une clique, la proposition 8 indique que le diamètre δ est 2, et 1 dans le cas contraire.

Proposition 1

Le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est γ - parfait si, et seulement si, chaque G_i est γ - parfait.

Rappelons qu'un graphe G est γ - parfait (resp. α - parfait) si tout sous-graphe G' de G vérifie $\gamma(G') = \omega(G')$ (resp. $\alpha(G') = \theta(G')$).

Démonstration

Si chaque G_i est γ - parfait, on a $\gamma_i = \omega_i$ pour $i = 1, \ldots, p$, et donc $\omega = \sum_{i=1}^{p} \omega_i = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i = \gamma$, ainsi $\omega = \gamma$.

Pour n = 2, le théorème est vérifié; supposons que pour 3, ... (n-1) il le soit encore.

Soit L un sous-graphe de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$; si L est contenu dans l'un des G_i, il est bien sûr γ - parfait, sinon soit L_i le sous-graphe $G_i \cap L$, on a donc $L = J(L_i)_{i=1,\ldots,p}$, notre hypothèse de récurrence indique alors que L est γ - parfait.

Ainsi $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est γ - parfait.

L'autre sens de l'implication est immédiat.

Proposition 2

Le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est α - parfait si, et seulement si, chaque G_i est α - parfait.

La démonstration est identique à celle de la proposition 1.

La proposition 1 du paragraphe 2 donne deux bornes pour la connectivité : $n - \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,p} n_i \leq k \leq n - \operatorname{Min}_{i=1,\ldots,p} n_i$

N.B. Les propositions 1 et 2 sont des corollaires du théorème de Lovàsz [46]

Nous pouvons cependant avoir la valeur exacte assez simplement :

Proposition 3

Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes; la connectivité de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est $k = n - \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}} (n_i - k_i)$.

Démonstration

Soit S un ensemble de séparation de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$, c'est-à-dire un ensemble de sommets dont la suppression disconnecte le graphe $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ et dont le cardinal soit minimum.

Il existe un indice i unique tel que $X_i \not\subset S$; en effet, dans l'hypothèse inverse, le graphe engendré par X-S serait connexe. Notons $S_i = S \cap X_i$; S_i est donc un ensemble de séparation de G_i et son cardinal est donc k_i ; ainsi, $k = \text{Min}\,(n - n_i + k_i) = n - \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}} (n_i - k_i)$.

Cette proposition donne la connectivité du joint; de par le théorème de Menger, nous savons que tout couple de sommets de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est relié par $k = n - \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Max}} (n_i - k_i)$ chaînes disjointes sauf en leurs extrémités; nous pouvons exhiber ces chaînes et montrer que pour certains couples il y a une manière unique de les construire ; ce qui revient à donner une autre démonstration de la proposition 3 en construisant les chaînes :

1) Soient x et y deux sommets appartenant respectivement à G_i et G_j $i \neq j$. Nous pouvons construire quatre types de chaînes élémentaires disjointes les reliant :

. L'arête $[x,y]$

. Toutes les chaînes $[x,z,y]$ où $z \in \bigcup_{\substack{h \neq i \\ h \neq j}} X_h$

. Toutes les chaînes $[x,z,y]$ où z est un sommet de X_i adjacent à x ou un sommet de X_j adjacent à y.

. Toutes les chaînes $[x,y',x',y]$ où y' est un sommet de X_j non adjacent à y et x' un sommet de X_i non adjacent à x.

Soit $\{1 + (n-n_i-n_j) + (d_i(x) + d_j(y)) + \text{Min}\,(n_i-d_i(x) -1,\ n_j-d_j(y)- 1)\}$ chaînes reliant x et y, nombre que l'on ramène à une expression plus simple par des calculs élémentaires : $n - \text{Max}\,(n_j-d_j(y), n_i - d_i(x))$; cette expression est bien sûr minimum si $d_j(y) = d_i$ et $d_i(x) = d_i$.

Montrons que toute famille de chaînes deux à deux disjointes, reliant x et y, $F = \{C_1,\ldots,C_q\}$, telle que q soit maximal, vérifie $q \leq n - \text{Max}\,(n_i - d_i(y), n_i - d_i(x))$:

- Si C_1 est une chaîne contenant un sommet z adjacent à x dans G_i, ou adjacent à y dans G_j, posons $C'_1 = [x,z,y]$; on obtient par ce procédé une famille F' déduite de F et ayant q éléments.

- Si C_b est une chaîne de F' contenant un sommet z de $\bigcup_{h\neq i,j} X_h$, posons $C'_b = [x,z,y]$; nous obtenons ainsi une famille F'' ayant encore q éléments.

Soit C''_k une chaîne qui n'est pas de longueur 2. Soit x' un sommet de C''_k appartenant à X_i et y' un sommet de C''_k appartenant à X_j (il est immédiat de vérifier qu'il en existe). On peut poser $C'''_k = [xy'x'y]$ et obtenir ainsi une famille F''' de chaînes deux à deux disjointes, reliant x et y, F''' ayant q éléments.

De par la construction de F''', il est clair que

$$q = n - \text{Max}\,(n_j - d_j(y),\ n_i - d_i(x)).$$

2) Soient $x \in G_i$, $y \in G_i$, nous pouvons construire deux types de chaînes de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ les reliant :

. Toutes les chaînes $[x, z, y]$, où $z \in \bigcup_{h \neq i} X_h$.

. k_i chaînes de G_i, puisque G_i est k_i-connexe.

Soit $n - n_i + k_i$ chaînes.

Dans chaque G_i il existe deux sommets x' et y' reliés par k_i-chaînes disjointes exactement, si $C_1, \ldots, C_q$ est une famille de chaînes disjointes reliant x' et y' dans $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$.

Par le même procédé que précédemment, on montre que $q = n - n_i + k_i$; ainsi :

$$k = \text{Min}\left[\underset{(i,j)}{\text{Min}} \{n - \text{Max}(n_i - d_i, n_j - d_j)\}, \text{Min}\{n - n_i + k_i\}\right]$$

$$= \text{Min}\left[n - \underset{i}{\text{Max}}(n_i - d_i), n - \underset{i}{\text{Max}}\, n_i - k_i\right]$$

$k = n - \underset{i}{\text{Max}}(n_i - k_i)$, d'où le théorème.

En particulier, si certains G_i ne sont pas connexes, on a $k = n - \underset{i}{\text{Max}}\, n_i$.

Proposition 4

L'arête connectivité λ de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est égale à : $\lambda = n - \text{Max}(n_i - d_i)$, où d_i désigne le degré minimum dans G_i.

Démonstration

D'après une des remarques faites au début de ce paragraphe, nous savons que le diamètre de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est 1 ou 2.

Si tous les G_i sont des cliques, $n - \text{Max}(n_i - d_i)$ vaut $n-1$ puisque $n_i - d_i = 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$.

Si un des G_i n'est pas une clique $\delta = 2$, nous pouvons appliquer le résultat du corollaire du théorème du chapitre 1 : l'arête - connectivité de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est égale au degré minimum d'un de ses sommets, soit $\underset{x \in X}{\text{Min}}\, d(x) = \text{Min}(n - n_i + d_i)$, ce qui est bien la valeur annoncée.

...

Proposition

Soit $\mathcal{F} = (G_1, \ldots, G_p)$ une famille de graphes simples indexée par ordre de cardinal décroissants $|X_1| \geq |X_2| \geq \ldots \geq |X_n|$; le cardinal d'un couplage maximum de $J(G_i)$ est donné par :

$$\nu(J(G_i)) = \frac{1}{2}(n - \text{Max}\{2n_1 - 2\nu_1 - n, \epsilon\})$$

où ν_1 est le cardinal d'un couplage maximum de G_1, où $n_i = |X_i|$, ϵ étant le reste de n modulo 2.

Preuve :

Calculons le nombre $q_i(S) = p_i(S) - |X - S|$ pour les parties $S \subset X$, où $p_i(S)$ désigne le nombre de composantes connexes du sous-graphe G_S ; nous pourrons alors évaluer $\nu(G)$ grace au théorème de Tutte-Berge [4] sur les couplages.

1) Pour $S = X$ $p_i(S) = \epsilon$ et $q_i(S) = \epsilon$.

2) Si $S \neq X$ et il n'existe pas i t.q. $S \subset X_i$, on a donc : $S \cap X_i \neq \emptyset$ pour deux indices au moins, et G_S est donc connexe, ainsi $p_i(S)$ est le reste modulo 2 de $|S|$; $p_i(S) \leq 1$

$$q_i(S) = p_i(S) - |X - S| \leq 1 + |S| - n \leq 0, \text{car } n \geq |S| + 1 .$$

3) Si $\exists 1 \in \{1, \ldots, p\}$ t.q $S \subset X_1$:

$$q_i(S) = p_i(S) - |X - S| = p_i(S) - |X_1 - S| - |\bigcup_{j \neq 1} X_i| , \text{ donc}$$

$q_i(S) = q_i^1(S) - n + n_1$ si $q_i^1(S)$ est l'indice $q_i(S)$ par rapport à G_1.

D'où :

$$\text{Max.}_{S \subset X_1} q_i^1(S) = \text{Max.}_{S \subset X_1} q_i^1(S) - n + n_1 = 2n_1 - 2\nu_1 - n ,$$

car $2\nu_1 = n_1 - \text{Max } q_i^1(S)$.

Ce maximum ne peut être strictement positif que pour $n_1 > n/2$, donc

pour n_1 éventuellement ; ainsi nous pouvons conclure :

$$\underset{1 \in \{1,\ldots p\}}{\text{Max.}} \quad \underset{S \subset X_1}{\text{Max.}} \quad q_i^1 (S) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{S \subset X_1}{\text{Max}} \quad q_i^1 (S) > 0$$

En ce cas on a: $\nu (G) = \frac{1}{2} (n - (n + 2 \nu_1 - 2 n_1)) = \nu_1 + n_1$

d'où l'énoncé proposé.

Corollaire

Sous les hypothèses de la proposition on a :

$$r (J (G_i)_{i=1,\ldots,p}) \leq \frac{n}{2} + \text{Max} \{ 2 n_1 - 2 \nu_1 - n , \epsilon \}$$

où r (G) est le cardinal minimum d'une couverture des sommets par des arêtes . Il suffit d'utiliser l'inégalité $r (G) \leq n - \nu (G)$ [4]

Proposition

Soit $\mathcal{F} = \{G_1,\ldots,G_p\}$ une famille de graphes simples indexée par ordre de cardinal décroissant $|X_1| \geq |X_2| \geq \ldots \geq |X_p|$; le cardinal maximum d'un transversal de $J (G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est :

$$\tau (J (G_i)_{i=1,\ldots,p}) = n - \underset{i=1,\ldots p}{\text{Max}} (n_i - \tau (G_i)),$$

un transversal T' étant une partie $T \subset X$ telle que toute arête de G ait au moins une extrémité dans T.

Soit T un transversal de $J (G_i)_{i=1,\ldots,p}$. Pour tout couple $\{x_i, x_j\}$ de sommets tels que $n_i \in X_i$ et $x_j \in X_j$ avec $i \neq j$, un des deux sommets appartient à T; ainsi si $x \in X - T$, $x \in X_{i_o}$ par exemple , alors $T \supset (\underset{j \neq i_o}{\cup} X_j)$.

par ailleurs $T \cap X_{i_o} = T_{i_o}$ est un transversal de G_{i_o} et donc :

$$T = (\underset{j \neq i_o}{\cup} X_j) \cup T_{i_o} \text{ , d'où } |T| = \tau (J (G_i)_{i=1,\ldots p}) \geq \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Min}} (n - n_i + \tau (G_i)).$$

Inversement, tout sous ensemble de X de la forme $(\underset{j \neq i_o}{\cup} X_j) \cup T_{i_o}$ est un transversal de $J (G_i)_{i=1,\ldots,p}$, donc :

$$|T| \leq \text{Min} (n - n_i + \tau (G_i)).$$

Recouvrement des arêtes par des chaînes ou cycles simples, cycles eulériens

Nous étudions tout d'abord les recouvrements des arêtes d'un graphe par des chaînes simples ou des cycles simples, arêtes - disjointes. A partir des résultats obtenus, nous déduirons une condition nécessaire et suffisante pour que $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ soit eulérien.

Un graphe $G = (X, E)$ étant donné, nous noterons $\pi'(G)$ le nombre minimum de cycles simples ou chaînes simples, arêtes-disjointes, qui partitionnent E; une telle partition sera appelée π'-partition.

X^I et X^P désigneront respectivement l'ensemble des sommets de degrés impairs et l'ensemble des sommets de degrés pairs de G ; leur cardinaux seront notés n^I et n^P.

Proposition 5

Soit G un graphe ayant r composantes connexes, alors :

a) Si $n^I = 0$, on a $\pi'(G) = r$.

b) Si $n^I \neq 0$ et $r = 1$, on a $\pi'(G) = \frac{n^I}{2}$.

c) Si $n^I \neq 0$ et $r > 1$, on a : $\text{Max}\left\{\frac{n^I}{2}, r\right\} \leq \pi'(G) \leq \frac{n^I}{2} + r$.

Démonstration

- Si $n^I = 0$, chaque composante connexe est un sous-graphe eulérien, et donc $\pi'(G) = r$, d'où l'égalité a).

- Si $n^I \neq 0$ et $r = 1$, considérons une famille $\mathcal{F}$ d'arêtes supplémentaires en nombre $\frac{n^I}{2}$ ajoutées à G, de telle sorte que chaque sommet de X^I soit extrémité d'une et d'une seule d'entre elles. Le nouveau graphe obtenu, soit G*, est donc eulérien. Soit $\mathcal{C}$ un cycle eulérien de G*, par suppression

des arêtes de $\mathcal{F}$ (qui n'ont pas d'extrémités communes) on obtient une π'-partition de E en $\frac{n^I}{2}$ chaînes ou cycles simples.

Ainsi $\pi'(G) \leq \frac{n^I}{2}$.

Inversement, si $C_1, \ldots, C_q$ est une π'-partition de E ayant un nombre q, minimal d'éléments, tout sommet $x \in X$ n'est extrémité que d'une chaîne au plus ; ainsi les extrémités de chaînes ont un degré impair et donc $q \geq \frac{n^I}{2}$, d'où la deuxième égalité b).

- Si $r > 1$ et $n^I \neq 0$, désignons par $H_1, \ldots, H_r$ les composantes connexes de G. L'égalité b) appliquée à chaque H_i nous donne :

$$\pi'(H_i) = \text{Max} \left\{ 1 ; \frac{n_i^I}{2} \right\}$$

Il est clair que $\pi'(G) = \sum_{i=1}^{r} \pi'(H_i)$ et donc :

$$\pi'(G) = \sum_{i=1}^{r} \text{Max} \left\{ 1 ; \frac{n_i^I}{2} \right\} \leq \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i^I}{2} + r = \frac{n^I}{2} + r$$

et $\text{Max} \left\{ r ; \frac{n^I}{2} \right\} \leq \pi'(G)$, d'où l'inégalité c).

Proposition 6

Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes indexés de telle sorte que pour un entier q, $0 \leq q \leq p$, on ait : $i \leq q \Leftrightarrow n_i$ et $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$ de même parité.

Alors : $\pi'(J(G_i)_{i=1,\ldots,p}) = \text{Max} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{q} n_i^I + \sum_{i=q+1}^{r} n_i^P ; 1 \right) \right\}$

Démonstration

Le joint d'une famille de graphes étant connexe, $\pi'(G) = \text{Max} \left\{ 1, \frac{n^I}{2} \right\}$. Le problème revient donc à calculer le nombre n^I.

Le degré d'un sommet x est $d(x) = d_i(x) + \sum_{j \neq i} n_j = d_i(x) + n - n_i$ et donc, pour $i \leq q$, $n - n_i$ étant pair, $x \in X^I$ pour $d_i(x)$ impair.

pour $i > q$, $n - n_i$ étant impair, $x \in X^I$ pour $d_i(x)$ pair.

Ainsi $X^I = (\bigcup_{i=1}^{q} X_i^I) \cup (\bigcup_{i=q+1}^{p} X_i^P)$, ces ensembles sont bien sûr disjoints et donc :

$$|X^I| = \sum_{i=1}^{q} n_i^I + \sum_{i=q+1}^{p} n_i^P \text{ , d'où la proposition.}$$

Dans le théorème qui suit, nous appelerons pré-eulérien un graphe dont tous les degrés sont pairs. Ce théorème caractérise les familles de graphes ayant un joint eulérien.

Théorème 1.

Soit $(G_i)_{i = 1,\ldots,p}$ une famille de graphes; le joint $J\,(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est eulérien si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est réalisée :

a) Tous les G_i sont pré-eulériens et ont un nombre de sommets pairs.

b) Tous les G_i sont pré-eulériens et ont un nombre de sommets impairs, de plus p est impair.

c) Il existe un entier $q, 0 \leq q \leq p$, tel que q graphes G_i soient pré-eulériens et que les (p-q) autres ne le soient pas ; les premiers ont des nombres impairs de sommets, et q est impair ; les seconds ont tous leurs degrés impairs.

Démonstration

Supposons les G_i indexés comme indiqué dans l'énoncé de la proposition précédente; nous avons vu que $|X^I| = \sum_{i=1}^{p} n_i^I + \sum_{i=q+1}^{p} n_i^P$ pour cette indexation.

. Si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie les conditions du a), n est pair et q = p puisque chaque n_i est pair, ainsi $\sum_{i=1}^{p} n_i^I = |X^I| = 0$ et donc $J\,(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est eulérien.

. Si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie les condition du b), n est impair et $q = p$, donc $|X^I| = \sum_{i=1}^{p} n_i^I = 0$ et $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est encore eulérien.

. Si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie les conditions du c), n est impair et $|X^I| = \sum_{i=1}^{q} n_i^I + \sum_{i=q+1}^{p} n_i^p = 0$, et $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est eulérien.

Réciproquement, si la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ a un joint eulérien, pour un sommet x quelconque on a $d(x) = d_i(x) + n - n_i$; $d(x)$ étant pair, $d_i(x)$ et $(n - n_i)$ sont donc de même parité ; ainsi $d_i(x)$ est de parité constante pour $x \in X_i$, i fixé.

1°) Si n est pair

$n_1, \ldots, n_q$ sont pairs et $n_{q+1}, \ldots, n_p$ impairs, donc les $G_{q+1}, \ldots, G_p$ sont pré-eulériens.

Si $q = p$, tous les n_i sont pairs, pour un sommet $x \in X_i$ quelconque on a $d(x) = d_i(x) + (n - n_i)$; $d(x)$ et $n - n_i$ sont pairs donc $d_i(x)$ est pair et G_i est pré-eulérien; la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie donc les hypothèses du a).

$q \neq 0$; en effet, pour $q = 0$, les G_i seraient tous pré-eulériens avec les n_i impairs, ce qui donnerait des degrés impairs pour tous les sommets de G.

$0 < q < p$ est impossible; dans ce cas, pour un indice r quelconque tel que $q < r \leq p$ et un sommet quelconque x de X_r, nous aurions :
$d(x) = d_r(x) + (n - n_r)$, donc impair.

2°) Si n est impair

$n_1, n_2, \ldots, n_q$ sont impairs et $n_{q+1}, \ldots, n_p$ sont pairs et donc $G_1, G_2, \ldots, G_q$ sont pré-eulériens.

...

Si $q = p$, tous les G_i sont pré-eulériens. p est impair, puisque $\sum_{i=1}^{p} n_i$ est impair et que chaque n_i est impair; la famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie donc les hypothèses du b).

$q \neq 0$, puisque dans le cas contraire tous les n_i seraient pairs et donc n également.

Si $0 < q < p$, supposons qu'il existe un indice r tel que G_r soit pré-eulérien et $q < r \leq p$. Pour un sommet $x \in X_r$, $d(x) = d_r(x) + n - n_r$ donc $d(x)$ serait impair.

Ainsi tous les G_i, $i \geq q + 1$ ont des sommets de degré impair seulement. q est impair : pour un sommet $x \in X_p$, $d(x) = d_p(x) + n - n_p = d_p(x) + \sum_{i=1}^{q} n_i + \sum_{i=q+1}^{p-1} n_i$, donc $d_p(x)$ et $\sum_{i=1}^{q} n_i$ sont de même parité; n_i étant pair pour $i \leq q$, q est donc impair. La famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ vérifie donc les hypothèses du c).

Ceci achève la démonstration du théorème.

Partition de X en chaînes, problèmes hamiltoniens

Notons que K_p est hamiltonien et donc nous avons quelques résultats qui découlent immédiatement de ceux du paragraphe 3 :

Proposition 7

S'il existe un entier r tel que $\pi(G_i) \leq r \leq n_i$ pour tout i, $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Théorème 2

Soit $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes telle que $n_1 \geq n_i$ pour

...

$i = 1, \ldots, p$; alors si :

(1) $\quad n_1 \leq \frac{n}{2}$

ou bien

(2) $\quad n_1 > \frac{n}{2}$ et $|H_1^k| < k + n - n_1$ pour $i \leq k \leq \frac{1}{2}(2n_1 - n - 1)$

où $H_1^k = \{ x \in X_1 \mid d_1(x) \leq k \}$

Le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Démonstration

(1) Si $n_1 \leq n/2$, on a $n_i \leq \frac{n}{2}$ pour $i = 1, \ldots, p$ et donc pour tout $x \in X$, $d(x) \geq \frac{n}{2}$; $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est donc hamiltonien, d'après [3] .

(2) Si $n_1 > n/2$, tout sommet x n'appartenant pas à X_1 a un degré $d(x) \geq |X_1| = n_1 > \frac{n}{2}$. Si nous notons H^k l'ensemble $\{x \in X \mid d(x) \leq k \}$ pour $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, nous aurons donc $H^k = H_1^{k-n+n_1}$ puisqu'un sommet de X_1 a pour degrés $d(x) = d_1(x) + (n - n_1)$ dans $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$, ainsi : $|H^k| < k - n + n_1 + (n - n_1)$, soit $|H^k| < k$ pour $1 \leq k - n + n_1 \leq \frac{1}{2}(2n_1 - n - 1)$, c'est-à-dire pour $n - n_1 + 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$.

Par ailleurs, $H^k = \emptyset$ pour $1 \leq k \leq n - n_1$ et donc les hypothèses du théorème de Posa [53] sont réalisées et $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est hamiltonien.

Théorème 3

Soit $G_i)_{i=1,\ldots,p}$ une famille de graphes hamiltoniens, le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est $(n - 2)$ hamiltonien-connecté.

Rappelons que dans [11] un graphe G est dit q-hamilton connecté si, pour tout couple x,y de sommets, il existe des chaînes élémentaires de G ayant pour longueur n-1, n-2,..., n-q et pour extrémités x et y.

Démonstration

Il s'agit donc de démontrer que pour deux sommets x et y quelconque il existe une chaîne de longueur k pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n - 1$.

1°) Si x et y ne sont pas dans le même graphe G_i , par commodité nous pouvons considérer : $x \in X_1$, $y \in X_p$.

Désignons par $H_j = [u_1^j, u_2^j, \ldots, u_{n_j}^j, u_1^j]$ $j = 1, \ldots, p$ des cycles hamiltoniens de chaque graphe G_j, en convenant de prendre $x = u_1^1$ et $y = u_{n_p}^p$.

Soit $\mathcal{C}$ la chaîne suivante :

$$\mathcal{C} = [u_1^1, u_2^1, \ldots, u_{l_1}^1 ; u_1^2, u_2^2, \ldots, u_{l_2}^2 ; \ldots, u_{l_{p-1}}^{p-1}, u_{l_p}^p, \ldots, u_{n_p}^p]$$

où pour chaque j on a $1 \leq l_j \leq n_j$.

Pour toutes les valeurs possibles des entiers l_j, il est clair que la longueur de $\mathcal{C}$ varie de (n - 1) à p.

Considérons ensuite $\mathcal{C}' = [u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^{p-j}, u_{n_p}^p]$, c'est une chaîne de longueur p-j avec $1 \leq j \leq p - 1$. Nous avons donc construit des chaînes élémentaires ayant pour extrémités x et y et de longueurs $1, 2, \ldots, (n - 1)$.

2°) Si x et y appartiennent au même graphe G_i, G_1 par commodité:

considérons les cycles H_j précédents avec $u_1^1 = x$ et $u_k^1 = y$.

Soit $\mathcal{C} = [u_2^1, u_2^1, \ldots, u_{l_1}^1, u_1^2, \ldots, u_{l_2}^2, u_1^k, u_2^k, \ldots, u_1^p, \ldots, u_{l_p}^p, u_j^1, \ldots, u_k^1]$

avec $1 \leq l_1 \leq k-1$, $j \leq k \leq n_1$ et $1 \leq l_k \leq n_h$ pour $h = 2, \ldots, p$.

Les chaînes ainsi obtenues ont pour longueur (n - 1), (n - 2), ..., p. En construisant comme précédemment les chaînes : $[u_1^1, u_1^2, \ldots, u_1^j, u_k^1]$ pour $j = 1, 2, \ldots, p$ on obtient bien toutes les longueurs de p à 2, d'où le résultat.

Condition pour qu'un graphe G soit le joint d'une famille de graphes

Nous avons étudié jusqu'ici les propriétés de $J(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ connaissant celles des G_i. Inversement, un graphe G étant donné, est-il le joint d'une famille de sous-graphes ?

Théorème 4

Soit $G = (X, E)$ un graphe ayant n sommets et $2 \leq p \leq n$ un entier. G est le joint d'une famille de p graphes G_i non vides si et seulement si le graphe complémentaire $\overline{G}$ a un nombre $q \geq p$ de composantes connexes.

Démonstration

Soient $Y_1, \ldots, Y_q$ les sous-ensembles de X déterminés par les composantes connexes de $\overline{G}$.

- Si $q \geq p$, considérons les sous-graphes $(G_i)_{i=1,\ldots,q}$ engendrés dans G par les $(Y_i)_{i=1,\ldots,q}$. Soient x et y deux sommets de X, respectivement dans Y_i et Y_j $i \neq j$, l'arête $[x,y]$ n'est pas dans $\overline{G}$ et donc ces sommets sont adjacents dans G. G est donc le joint $J(G_i)_{i=1,\ldots,q}$ en posant $Y' = \bigcup_{i=1}^{q-p+1} Y_i$ et si G' est le sous-graphe engendré dans G par Y', $G' = J(G_i)_{i=1,\ldots,q-p+1}$ et $J(G', (G_i)_{(q-p+2)\ldots q}) = G$.

- Inversement, si G est joint d'une famille $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$, soient $X_1, \ldots, X_p$ les ensembles de sommets des G_i. Deux sommets x et y appartenant à des sous-ensembles X_i et X_j différents appartiennent à des composantes connexes de $\overline{G}$ différentes, puisque toute chaîne les reliant dans $\overline{G}$ devrait comporter une arête joignant deux sommets appartenant à des X_i différents. Chaque X_i est donc réunion de sous-ensembles $\{Y_i\}_{1,\ldots,q}$ et donc $q \geq p$.

§ 5 - Etude du cas particulier $H = C_p$, $p > 3$ cycle élémentaire ayant p sommets

Par commodité, dans ce paragraphe, le cycle C_p sera indexé selon un sens de parcours : $C_p = (x_1, \ldots, x_p)$ et tous les indices seront exprimés modulo p.

On vérifie aisément que, pour $H = C_p$, les différents paramètres étudiés sont: $\alpha_{C_p} = \left[\frac{p}{2}\right]$, $\alpha'_{C_p} = \left]\frac{p}{3}\right[$, $\omega_{C_p} = \omega'_{C_p} = 2$, $\delta_{C_p} = \left[\frac{p}{2}\right]$, $k_{C_p} = 2$,

$\lambda_{C_p} = 2$, $\gamma_{C_p} = 2$ si p est pair et 3 sinon, $\theta_{C_p} = \left]\frac{p}{2}\right[$, $\beta_{C_p} = \left]\frac{p}{3}\right[$

où pour un réel m quelconque $]m[$ désigne l'entier immédiatement supérieur ou égal, et $[m]$ l'entier immédiatement inférieur ou égal.

Par les propositions 1, 2, ..., 8 du paragraphe 1 nous déduisons donc immédiatement :

$$\left]\frac{p}{2}\right[$$

- Si $\theta_{i_1} \geq \theta_{i_2} \geq \ldots \geq \theta_{i_p}$: $\operatorname{Max}\{\theta_1; \left]\frac{p}{2}\right[\} \leq \theta \leq \sum_{j=1} \theta_{i_j}$

- Si $\gamma_{i_1} \geq \gamma_{i_2} \geq \gamma_{i_3} \geq \gamma_{i_j}$ pour $4 \leq j \leq p$, alors :

$\gamma_{i_1} \leq \gamma \leq \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2}$ si p est pair,

$\gamma_{i_1} \leq \gamma \leq \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \gamma_{i_3}$ si p est impair,

- Si $\omega_{i_1} \leq \omega_{i_2} \leq \ldots \leq \omega_{i_p}$: $\omega_{i_1} + \omega_{i_2} \leq \omega \leq \sum_{j=1}^{p} \omega_j$.

Nous pouvons cependant donner la valeur exacte de ω en fonction des $(\omega_i)_{i=1,\ldots,p}$, en remarquant qu'une clique de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est le joint de deux cliques appartenant à des graphes d'indices consécutifs sur C_p et donc $\omega = \operatorname{Max}_{i=1,\ldots,p} \{\omega_i + \omega_{i+1}\}$.

- Pour $\omega'_{i_1} \geq \omega'_{i_2} \geq \ldots \geq \omega'_{i_p}$: $\omega'_{i_p} + \omega'_{i_{p-1}} \leq \omega' \leq \omega'_{i_1} + \omega'_{i_2}$

La même remarque que précédemment donne : $\omega' = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{Min}} \{ \omega'_i + \omega'_{i+1} \}$

- Pour $\alpha_{i_1} \geq \alpha_{i_2} \geq \ldots \geq \alpha_{i_p}$: $\sum_{j=1}^{[p/2]} \alpha_{i_{p-j+1}} \leq \alpha \leq \sum_{j=1}^{[p/2]} \alpha_{i_j}$

on peut améliorer légèrement la borne inférieure en remarquant que l'on peut construire un ensemble stable σ de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ ne contenant pas de sommets dans G_{i_p} en prenant :

$\sigma = \bigcup_{1 \leq j \leq]p/2[} \sigma_{i_{p-2j+1}}$ où $\sigma_{i_{p-2j+1}}$ est un stable maximum de $G_{i_{p-2j+1}}$. On aura alors $\alpha \geq |\sigma| \geq \sum_{j=2}^{]p/2[} \alpha_{i_{p-j+1}}$

- Pour $\alpha_{i_1} \geq \ldots \geq \alpha_{i_p}$ et $\alpha'_{j_1} \leq \alpha'_{j_2} \leq \ldots \leq \alpha'_{j_p}$ nous aurons :

$$\sum_{l=1}^{]p/3[} \alpha'_{j_l} \leq \alpha' \leq \sum_{l=1}^{[p/2]} \alpha_{i_l}$$

De la même façon que pour α nous pouvons améliorer la majoration :

$$\alpha' \leq \sum_{l=2}^{[p/2]+1} \alpha_{i_l}$$

- Pour $\beta_{i_1} \geq \beta_{i_2} \geq \ldots \geq \beta_{i_p}$: $]p/3[\leq \beta \leq \text{Min} \{ 2\,]p/3[, \sum_{j=1}^{]p/3[} \beta_{i_j} \}$

- le diamètre de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ sera $\delta = \text{Max} \{ 2, [p/2] \}$ donc pour $p > 3$ nous aurons $\delta = [p/2]$

Connectivité de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$

De cette dernière remarque et de la proposition 2 du § 2 il vient

immédiatement :

- Pour $p \leq 5$ l'arête-connexité de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est égale au degré minimum d'un sommet.

- Nous pouvons explicitement avoir la connectivité de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$:

La proposition 1 du § 2 donne un encadrement :

Si $n_{i_1} \leq n_{i_2} \leq \ldots \leq n_{i_p}$: $n_{i_1} + n_{i_2} \leq k \leq n_{i_{p-1}} + n_{i_p}$

Pour la valeur exacte de k, examinons les ensembles d'articulation de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$:

. Si x et y sont deux sommets d'un même graphe G_i de connectivité notée k_i comme précédemment, tout ensemble σ séparant x et y vérifiera :

$|\sigma| \geq k_i + n_{i-1} + n_{i+1}$; il est clair que pour un certain i et un couple x, y de G_i au moins il existe un ensemble de séparation ayant

$$\min_{i=1,\ldots,p} \{ k_i + n_{i-1} + n_{i+1} \}$$

éléments.

. Si x et y sont deux sommets appartenant à des graphes G_i et G_{i+1}, un ensemble de séparation inclura un ensemble X_j tout entier, pour $j \neq i$ et $j \neq i+1$; d'autre part, pour séparer x et y dans $J(G_i, G_{i+1})$, il aura au moins $\text{Min}\{n_i + d_{i+1}(y), n_{i+1} + d_i(x)\}$ éléments d'après le raisonnement exposé lors du paragraphe 4 pour la connectivité de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ quand $H = K_p$.

. Si x et y sont deux sommets appartenant à des graphes G_i et G_j avec $j \neq i \neq 1$, tout ensemble d'articulation est formé de $X_k \cup X_l$ pour $k \neq i, j$ et $l \neq i, j$. De ces considérations et de calculs élémentaires il vient :

Proposition 1

La connectivité k de $J_{C_p}(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est $\min_{|k-1| \geq 2} \{n_l + n_k\}$.

§ 6 - Graphes irréductibles par joint

Nous dirons qu'un graphe simple G = (X, E) est irréductible par joint s'il ne peut être défini comme joint d'une famille non triviale de sous-graphes (c'est-à-dire comportant au moins un sous-graphe non réduit à un sommet).

Proposition 1

Un graphe simple G = (X, E) est irréductible par joint si et seulement si toute partie X' de X, de cardinal $|X'| \geq 2$, vérifie :

$$\exists x \in X', \exists y \in X' \text{ tels que } V(x) \cap (X - X') \neq V(y) \cap (X - X')$$

où V (x) et V (y) désignent les sommets de G adjacents à x et y respectivement

Démonstration immédiate.

Proposition 2

Un arbre T = (X, E) est irréductible si et seulement si, pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets pendants, on a $d(x, y) > 2$.

La condition est nécessaire : si x et y sont deux sommets pendants à distance 2, en posant $X' = \{x, y\}$ on obtient une partie X' de X ne satisfaisant pas la condition de la proposition 1.

La condition est suffisante ; supposons qu'il existe une partie X' de X ne satisfaisant pas la condition de la proposition 1, alors que G satisfait les hypothèses de la proposition 2. Soient s et t deux sommets de X'; s'il existe une chaîne de $G_{X'}$ ayant s et t pour extrémités, considérons un sommet u de V (s) = V (t); les arêtes $[u, s]$ et $[u, t]$ étant dans T, celui - ci possèderait donc un cycle, ce qui est impossible. $G_{X'}$ est donc un stable de T.

Si X' n'est formé que de sommets pendants, deux quelconques d'entre eux, x et y, ont une distance supérieure à 2 et donc V (x) ≠ V (y), ce qui contredit le choix de X'. Considérons donc un sommet s de X' non pendant dans T, et soient s' et s" deux voisins de s appartenant à des composantes connexes différentes de $T_{X - \{s\}}$; X' étant stable, s' et s" sont des sommets de X' - X"; il est bien clair qu'un sommet t de X', différent de s, ne peut être adjacent à s' et s", d'où la contradiction cherchée.

Proposition 3

Soit G = (X, E) un graphe simple irréductible, son nombre d'arêtes m vérifie : $m \leq \frac{1}{2}(n^2-3n+[\frac{n}{2}])$ et si $n \geq 6$ l'inégalité est stricte.

Démonstration

- Tout sommet x de X a un degré inférieur à n - 1; en effet, si $d_G(x) = n-1$, alors G est le joint de $\{x\}$ et $G_{X-\{x\}}$.

- Si G contient des sommets de degré n-2, ils forment une clique K_p : supposons que deux d'entre eux, x et y, soient non adjacents, alors $V(x) = V(y) = X - \{x,y\}$, et la partie $X' = \{x,y\}$ de X ne satisfait pas la condition de la proposition 1.

- $p \leq [\frac{n}{2}]$; en effet, tout sommet x de K_p est non adjacent à un unique sommet $\varphi(x) = y$ de $X - K_p$. φ est injective : si $\varphi(x) = \varphi(y)$ avec $x \neq y$, la partie $X' = \{x,y\}$ ne satisfait pas la condition de la proposition 1 ; ainsi l'on a $p = |\varphi(K_p)| \leq |X - K_p| = n - p$, donc $p \leq [\frac{n}{2}]$.

- G a donc p sommets de degré n - 2 et n - p sommets de degrés inférieurs ou égaux à n - 3, d'où :

$$m \leq \frac{1}{2}\left([\tfrac{n}{2}](n-2) + (n-3)(n-[\tfrac{n}{2}])\right) = \frac{1}{2}\left([\tfrac{n}{2}] + n^2 - 3n\right)$$

- Il n'existe pas de graphe irréductible ayant exactement $\frac{1}{2}([\frac{n}{2}] + n^2 - 3n)$ arêtes ; supposons que G est irréductible et ait $\frac{1}{2}([\frac{n}{2}] + n^2 - 3n)$ arêtes exactement, c'est-à-dire qu'il ait $[\frac{n}{2}]$ sommets de degré n - 2 et $(n - [\frac{n}{2}])$ sommets de degré n - 3:

* Si n est pair, $\overline{G}$ est donc formé de composantes connexes qui sont des chaînes élémentaires de 4 sommets. Soit [a, b, c, d] l'une d'entre elles. Posons $X' = \{a,b,c,d\}$, il est bien clair que pour $n \geq 6$ X' ne vérifie pas la propriété de la proposition 1.

* Si n est impair, $\overline{G}$ est formé de composantes connexes qui sont : une chaîne de 5 sommets et éventuellement d'autres chaînes de 4 sommets. Pour $n \geq 6$ les sommets de la chaîne de longueur 4 forment une partie X' ne vérifiant pas la propriété de la proposition 1.

Ainsi, pour $n \geq 6$, l'inégalité de l'énoncé est stricte.

TABLEAU RECAPITULATIF DES RESULTATS DU CHAPITRE 2

+.+.+.+.+.+.+

H	ω	ω'	γ	θ
Graphe indexé (toujours connexe)	cardinal d'une clique maximum de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$	cardinal minimum d'une clique de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$, maximale pour l'inclusion.	Nombre chromatique de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$	Indice de partition en cliques de l'ensemble des sommets.
H quelconque	pour $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_p$ $\sum_{j=1}^{\omega_H} \omega_j \leq \omega \leq \sum_{j=1}^{p} \omega_j$	pour $\omega'_1 \geq \omega'_2 \geq \ldots \geq \omega'_p$ $\sum_{i=1}^{\omega'_H} \omega'_{p-i+1} \leq \omega' \leq \sum_{i=1}^{\omega_H} \omega'_i$	pour $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_p$ $\gamma_1 \leq \gamma \leq \sum_{j=1}^{\gamma_H} \gamma_j$	pour $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \ldots \geq \theta_p$ $\text{Max}\{\theta_1, \theta_H\} \leq \theta$ et $\theta \leq \sum_{j=1}^{\theta_H} \theta_j$
$H = K_p$ clique de p sommets	$\omega = \sum_{i=1}^{p} \omega_i$	$\omega' = \sum_{i=1}^{p} \omega'_i$	$\gamma = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i$	$\theta = \text{Max}_{i=1,\ldots,p} \theta_i$
$H = C_p$ clique de p sommets élémentaire	$\omega = \text{Max}\{\omega_i + \omega_{i+1}\}$	$\omega' = \text{Min}_{i=1,\ldots,p}\{\omega'_i + \omega'_{i+1}\}$	pour $\gamma_{i_1} \geq \gamma_{i_2} \geq \gamma_{i_3} \geq \gamma_{i_j}$ $\gamma_{i_1} \leq \gamma \leq \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2}$ p pair $\gamma_{i_1} \leq \gamma \leq \gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \gamma_{i_3}$ pour p impair	pour $\theta_{i_1} \geq \ldots \geq \theta_{i_p}$ $\text{Max}\{\theta_1 ;]p/2[\} \leq \theta$ et $\theta \leq \sum_{j=1}^{]p/2[} \theta_{i_j}$

+.+.+.+

H	α	α'	β	δ
connexe	cardinal d'un ensemble stable maximum de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$	cardinal minimum d'un ensemble stable maximal pour l'inclusion dans $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$	Nombre d'absorption de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$	diamètre de $J_H(G_i)_{i=1,\ldots,p}$
H quelconque	pour $\alpha_1 \geq \alpha_2 \ldots \geq \alpha_p$ $\sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_{p-j+1} \leq \alpha \leq \sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_j$	pour $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_p$ et $\alpha'_{i_1} \leq \alpha'_{i_2} \leq \ldots \leq \alpha'_{i_p}$ $\sum_{j=1}^{\alpha'_H} \alpha'_{i_j} \leq \alpha' \leq \sum_{j=1}^{\alpha_H} \alpha_j$	pour $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_p$ $\beta_H \leq \beta \leq \text{Min}\{2\beta_{II}; \sum_{j=1}^{\beta_{II}} \beta_j\}$	Si l'un des graphes $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est non complet : $\delta = \text{Max}\{2 ; \delta_H\}$
$H = K_p$ clique ayant p sommets	$\alpha = \text{Max}_{i=1,\ldots,p} \alpha_i$	$\alpha' = \text{Min}_{i=1,\ldots,p} \alpha'_i$	$\beta = \begin{cases} 1 \text{ si } \exists i \mid \beta_i = 1 \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}$	$\delta = \begin{cases} 1 \text{ si } G_i = K_{n_i} \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$
$H = C_p$ clique élémentaire ayant p sommets, $p > 3$.	pour $\alpha_{i_1} \geq \alpha_{i_2} \geq \ldots \geq \alpha_{i_p}$ $\sum_{j=2}^{[p/2]+1} \alpha_{i_{p-j+1}} \leq \alpha \leq \sum_{j=1}^{[p/2]} \alpha_{i_j}$	pour $\alpha_{i_1} \geq \ldots \geq \alpha_{i_p}$ et $\alpha'_{j_1} \leq \alpha'_{j_2} \leq \ldots \leq \alpha'_{j_p}$ $\sum_{l=1}^{]p/3[} \alpha'_{j_l} \leq \alpha' \leq \sum_{l=2}^{[p/2]+1}$	pour $\beta_{i_1} \geq \beta_{i_2} \geq \ldots \geq \beta_{i_p}$ $]p/3[\leq \beta \leq \text{Min}\{2]p/3[, \sum_{j=1}^{]p/3[} \beta_{i_j}\}$	$\delta = [p/2]$

Chapitre 3. Cycles dans un graphe simple et problèmes hamiltoniens

pseudo-cycles hamiltoniens

1 - Existence de cycles de longueurs supérieures ou égales à un entier donné d'après le nombre d'arêtes

Tous les graphes considérés sont simples et connexes. Pour $G = (X, E)$, on note $|X| = n$ et $|E| = m$. Ainsi pour G on a :

$$n - 1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

les bornes étant atteintes pour les arbres et les cliques.

Un graphe étant donné, pour tout entier k, $3 \leq k \leq n$, il peut éventuellement exister dans G un ou plusieurs cycles de longueur $\geq k$. La clique possède tous ces cycles, ainsi on est amené à définir :

Définition

Soit k un entier vérifiant $3 \leq k \leq n$, on note $\tau_k(n)$ le plus petit entier tel que : $m > \tau_k(n) \Rightarrow$ le graphe G possède au moins un cycle de longueur $\geq k$

Exemple :

$\tau_3(n) = n - 1$; si $m > n - 1$, G est un arbre auquel on a ajouté une arête et possède donc un cycle de longueur ≥ 3.

Proposition 1

$$\tau_4(n) = \left[\frac{3}{2}(n-1)\right]$$

Preuve : Ce résultat est vérifié simplement pour les petites valeurs de n : si $n = 4, 5$ on a $\tau_4(4) = 4$, $\tau_5(5) = 6$. Supposons-le vérifié pour les graphes ayant un nombre de sommets strictement inférieur à n et supposons qu'il existe un graphe G' ayant n sommets, $m' > \left[\frac{3}{2}(n-1)\right]$, et qui ne contienne pas de cycles de longueur ≥ 4.

Par enlèvement d'arêtes n'appartenant pas à un arbre total de G', on peut extraire un graphe partiel G de G', connexe, ayant $m = \left[\frac{3}{2}(n-1)\right] + 1$ arêtes, et sans cycles de longueur ≥ 4. C'est sur ce dernier graphe que nous

travaillons maintenant.

Soit x_o un sommet de degré minimum dans G, ainsi

$$n \cdot d_G(x_o) \leq 2m \quad \text{soit} \quad d_G(x_o) \leq \frac{2}{n}\left([\tfrac{3}{2}(n-1)] + 1\right)$$

i.e. $d_G(x_o) \leq \dfrac{3n-1}{n} < 3 \Rightarrow d_G(x_o) = 1$ ou 2

A. Si $d_G(x_o) = 1$

Soit $G_o = G_{X-\{x_o\}}$, son nombre d'arêtes m_o vérifie :

$m_o = m - 1 = [\frac{3}{2}(n-1)]$, et son nombre de sommets est $n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence: $\tau_4(n-1) = [\frac{3}{2}(n-2)]$, donc :

$$m_o = [\tfrac{3}{2}(n-1)] > [\tfrac{3}{2}(n-2)] \geq \tau_4(n) \text{ donc } m_o \geq \tau_4(n)$$

Ainsi G_o possède un cycle de longueur ≥ 4, donc G et G' également, ce qui contredit notre supposition initiale.

B. Si $d_G(x_o) = 2$

Supposons dans un premier temps que x_o n'est pas un sommet d'articulation; soient z et z' les deux sommets de G adjacents à x_o. Dans $G_{X-\{x_o\}}$, z et z' sont reliés par une chaîne ou une arête puisque x n'est pas d'articulation ; si la chaîne avait une longueur ≥ 2, par adjonction de (y, x_o, z') on obtiendrait un cycle de G_o de longueur ≥ 4, ce qui est contraire à notre supposition de départ ; ainsi $[z, z']$ est une arête de G_o. Pour la raison qui vient d'être exposée $[z, z']$ est un isthme de G_o ; soient C et C' les ensembles de sommets des composantes connexes de z et z' dans $G_o - [z, z']$, et notons $p = |C|, p' = |C'|$ alors $p + p' = n-1$.

Un des deux entiers p, p' est supérieur ou égal à 4 ; en effet, si $p' = 1$ par exemple, on a : $n - 1 \geq 5$, donc $p \geq 4$ (car on considère $n \geq 6$, la proposition étant vérifiée pour $n = 4, 5$).

...

$p' = 2$ est impossible car alors $C' = \{z', s\}$, et ce sommet s aurait un degré $d_G(s) = 1$ inférieur à celui de x_o. Si $p' = 3$ et que l'on avait $p = 3$, G serait le graphe de la figure 1 et son nombre d'arêtes serait :

$$m = 9 < \left[\frac{3}{2}(n-1)\right] + 1 = 10$$

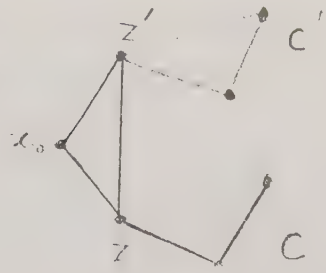


Figure 1.

1°) Si $p' = 1$, $C' = \{z'\}$.

Le graphe $G_1 = G_{X-\{x_o, z'\}}$ a n-2 sommets et m-3 arêtes, soit

$$m_1 = \left[\frac{3}{2}(n-1)\right] - 3.$$

De par l'hypothèse de récurence $\tau_4(n-2) = \left[\frac{3}{2}(n-3)\right]$, ainsi :

$$m_1 = \left[\frac{3}{2}(n-1)\right] - 2 > \left[\frac{3}{2}(n-3)\right] = \tau_4(n-2),$$

et donc G_1 possède un cycle de longueur ≥ 4, ce qui est impossible.

2°) Si $p' = 3$ alors $G_{C'}$ est une clique K_3 puisque $\min_X d_G(x) = 2$, et donc $G_2 = G_C = G_{X-\{x_o, C'\}}$ est un sous-graphe ayant n-4 sommets, $m_2 = m-6$ arêtes donc $m_2 = \left[\frac{3}{2}(n-1)\right] - 5$; l'hypothèse de récurence donne $\tau_4(n-4) = \left[\frac{3}{2}(n-5)\right]$ et l'on a bien :

$$m_2 = \left[\frac{3}{2}(n-1)\right] - 5 > \left[\frac{3}{2}(n-5)\right] = \tau_4(n-4),$$

ce qui est encore impossible.

3°) Si p et p' sont ≥ 4.

De par l'hypothèse de récurence on doit avoir :

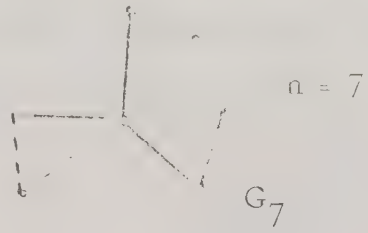
$$\begin{aligned} m(G_C) + m(G_{C'}) &\leq \tau_4(p) + \tau_4(p') \\ &\leq \left[\frac{3}{2}(p-1)\right] + \left[\frac{3}{2}(p'-1)\right] \leq \frac{3}{2}(p + p' - 2) \\ &\leq \frac{3}{2}(n-3) \end{aligned}$$

Or, $m(G_C) + m(G_{C'}) = m - 3 = \left[\frac{3}{2}(n-1)\right] - 2$, ce qui contredit cette inégalité.

Ainsi dans tous les cas notre supposition conduit à une contradiction, ce qui dénombre la proposition 1 dans le sens $\tau_4(n) \leq [\frac{3}{2}(n-1)]$. Pour $\tau_4(n) \geq [\frac{3}{2}(n-1)]$, il suffit de considérer la famille de graphes G_n, étoiles auxquels on ajoute $[\frac{n-1}{2}]$ arêtes entre des sommets pendants : G_n

G_6 $n = 6$

$m = 7 = [\frac{3}{2}(n-1)]$



$n = 7$

G_7

$m = 9 = [\frac{3}{2}(n-1)]$

ce qui achève notre démonstration.

Conjecture

$$\tau_k(n) = \frac{1}{2}((q+1)(k-1)(k-2) + r(r+1))$$

où

$$q = [\frac{n-k+1}{k-2}] \quad \text{et} \quad r = n - k + 1 - q(k-2)$$

c'est-à-dire :

$$n - k + 1 = q(k-2) + r$$

Dans la suite nous étudions les entiers $\tau_k(n)$ pour $k \geq 5$ nous noterons :

* $\mathcal{F}(n,k)$ la famille des graphes simples ayant n sommets et sans cycles de longueur supérieure ou égale à k.

* $\mathcal{G}(n,k)$ la famille des graphes ayant :

- $[\frac{n-k+1}{k-2}] + 1 = q + 1$ blocs qui sont des cliques de $k - 1$ sommets

- 1 bloc qui est une clique de $r + 1$ sommets.

Tous ces blocs ayant un seul point d'articulation commune et pas d'arête commune.

q et r désignant les entiers obtenus par division de $n - k + 1$

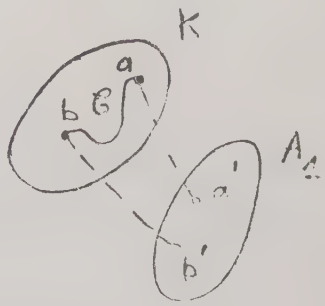
$n = (k-2)q + r \quad 0 \leq r < k - 2$.

On note $\tau_k(n) = \text{Min}\{ l \mid$ si G a n sommets et $m(G) > \tau_k(n)$ arêtes, alors G a un cycle de longueur $l \geq k \}$.

Proposition

Soit $G \in \mathcal{F}(n,k)$, ayant un nombre d'arêtes, $\tau_k(n)$, maximum parmi les graphes de $\mathcal{F}(n,k)$; si G est 2-connexe on a : $\omega(G) \leq k - 3$.

Démonstration :

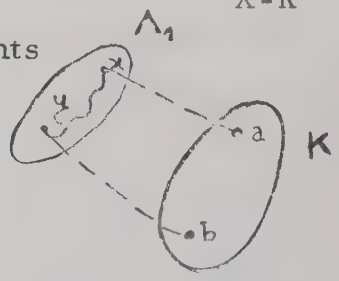


Soit K une clique maximum

1°) Si $\omega(G) = k - 1$, G_{X-K} a pour composantes connexes $A_1, \ldots, A_p$ $p \geq 1$ qui sont attachées à K en au moins deux points $\underline{a}$ et $\underline{b}$ pour A_1.

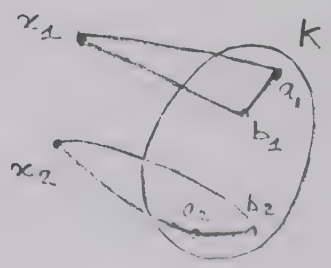
Soit $\mathcal{C}$ une chaîne hamiltonienne de K ayant pour extrémités a et b, on construit un cycle de longueur $l \geq k$ aisément.

2°) Si $\omega(G) = k - 2$ chaque composante connexe de G_{X-K} est réduite à un point, si A_1 avait deux sommets différents x et y reliés à des sommets différents, a et b de K, on pourrait construire un cycle de longueur $l \geq k$; donc: ou bien a = b ou bien x = y ; pour ne pas avoir de point d'articulation la seule possibilité est donc $A = \{x\}$.



Considérons deux composantes $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$. Si x_1 est relié à $u_1 = \{a_1, b_1\}$ et x_2 à $u_2\{a_2, b_2\}$ on a $u_1 = u_2$, dans le cas contraire on pourrait en effet intercaler les sommets x_1, x_2 dans un cycle hamiltonien de K, ce qui créerait un cycle de longueur $l \geq k$.

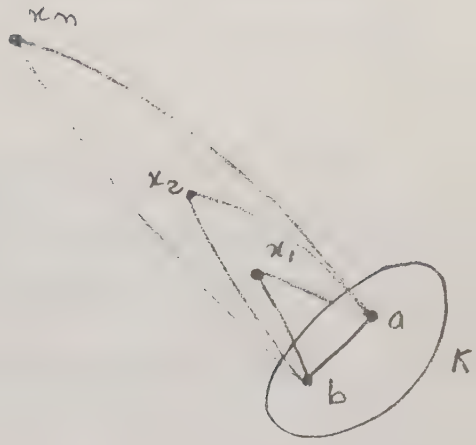
Le graphe G se présente donc selon la figure ci-jointe.



Le nombre d'arêtes de G est donc :

$$m(G) = \frac{(k-2)(k-3)}{2} + 2(n-k+2)$$

ce qui est inférieur au nombre d'arêtes d'un graphe de $\mathcal{G}(n,k)$, que l'on peut construire pour $|K| \leq n-1$, ce qui est ici le cas.



Corollaire

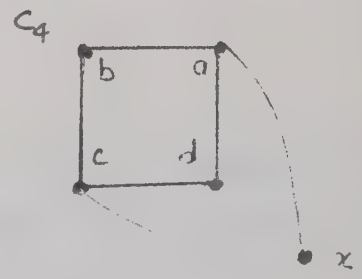
$\tau_5(n)$ est le nombre d'arêtes des graphes de $\mathcal{G}(n,5)$ et ce sont les seuls graphes ayant ce nombre d'arêtes parmi les graphes de $\mathcal{F}(n,5)$.

Démonstration :

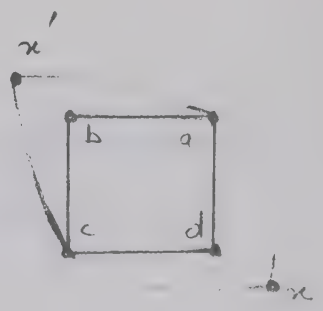
On a $w(G) \leq 5-3 = 2$, si G est 2-connexe et $G \in \mathcal{F}(n,5)$.

G est 2-connexe donc contient un cycle, il ne peut être de longueur 3 ou 5. Donc G contient un cycle de longueur 4, et n'est pas réduit à ce cycle sans quoi K_4 qui a un nombre d'arêtes supérieur conviendrait mieux.

Soit x extérieur au cycle, x est relié à {a,b} par deux chaînes élémentaires disjointes (théorème de Menger). G sans triangle donc x n'est pas relié à deux sommets adjacents sur le cycle. Si une des deux chaînes élémentaires disjointes reliant x au cycle C_4 n'est pas une arête on déduit immédiatement un cycle de longueur ≥ 5 donc on a deux arêtes liées à des sommets opposés, [x,a] et [x,c] par exemple.



Soit x' un autre sommet, s'il est relié à b et d, on peut déduire un cycle de longueur 6, donc G se présente sous la forme : sans arêtes du type [x,x'] qui créeraient des cycles de longueur ≥ 5.

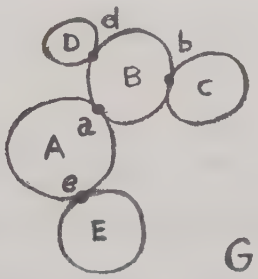


On a ainsi m (G) = 4 + 2 (n-4) = 2 n - 4, les graphes de $\mathcal{G}$ (n,5) que l'on construit ont un nombre d'arêtes plus grand que 2 n - 4,et donc G ne peut être 2-connexe.

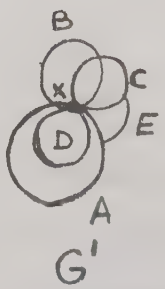
Le raisonnement valable dans le cas général montre alors que : G $\in \mathcal{G}$ (n,5). Soit x un point d'articulation de G ; on suppose que pour $|X| < n$ le résultat est démontré. Considérons un bloc B de G, tel que $|B| < n$; si on peut ajouter une arête à B,on crée un cycle de longueur $\geq k$,donc :

$$B \in \mathcal{F}'(|B|, k) \text{ et } |B| \geq k$$

Considérons un graphe G' déduit de G en identifiant les points d'articulation des différents blocs de G.



G



G'

Si B $\notin \mathcal{G}$ ($|B|$,k), soit B' $\in \mathcal{G}$ ($|B|$,k) ; remplaçons B par B' dans G, on obtient ainsi un graphe G' vérifiant m (G') > m (G). Ainsi on a : B $\in \mathcal{G}$($|B|$, k) et 2 connexe, $|B| < n$; d'après l'hypothèse de récurence G est donc une clique.

Ainsi tout bloc de G est une clique.

Si G contient deux cliques K_1 et K_2 ayant $|K_i| < k - 1$. On peut les remplacer par K'_1 et K'_2 obtenues en prenant un sommet à K_1 que l'on rajoute à K_2,si $|K_2| \geq |K_1|$.

On obtient ainsi G' ayant m (G') $\geq$ m (G).

Donc G est formé de cliques à k - 1 sommets,et d'une clique au plus comportant moins de k-1 sommets.

§ 2 - Pseudo-cycles-hamiltoniens dans un graphe simple connexe

Dans la suite de ce §,G désignera un graphe simple connexe ; on notera G = (X, E) $|X| = n$ et $|E| = m$. On aura toujours $n \geq 3$.

...

Définition 1

On appelle pseudo-cycle-hamiltonien d'ordre k de G, un cycle de G passant au moins une fois par chaque sommet, et de longueur n + k (N.B. cycle non élémentaire ou simple à priori).

Définition 2

On note s (G) = Min {k $\in \mathbb{N}$ t.q. G possède un pseudo-cycle-hamiltonien d'ordre k }. s (G) est appelé ordre hamiltonien de G.

Exemple : G hamiltonien $\Leftrightarrow$ s (G) = 0

G chaîne élémentaire $\Rightarrow$ s (G) = n - 2.

Remarque 1

Si x est un sommet pendant tout pseudo-cycle-hamiltonien de G est formé d'un pseudo-cycle-hamiltonien de $G_{X - \{x\}}$ et de l'arête d'attachement de x comptée 2 fois, ainsi s (G) = s ($G_{X - \{x\}}$) + 1. Si G possède k sommets pendants : s (G) = s (G_{X-P}) + k, où P est l'ensemble des sommets pendants.

Proposition 1

Si G est un arbre on a s (G) = n - 2.

En effet, soit x un sommet pendant, s ($G_{X - \{x\}}$) = s (G) - 1 ; par itération du prodédé n-3 fois on obtient une chaîne élémentaire C de 3 sommets, vérifiant s (G_C) = 1, et donc s(G) = n - 2.

La réciproque se déduira du corollaire 1 de la proposition 3.

Remarque 2

Si G' graphe partiel de G : s (G) $\leq$ s (G') : Evident.

Proposition 2

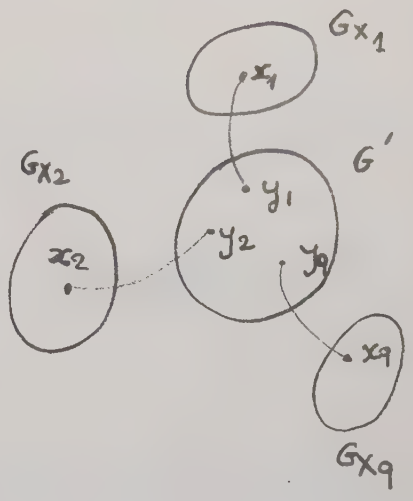
Pour G simple connexe on a $0 \leq$ s (G) $\leq$ n - 2.

En effet, G connexe $\Rightarrow \exists$ un arbre graphe partiel.

Proposition 3

Soit $G' = (X', E')$ un sous-graphe partiel connexe de G, vérifiant $n' = |X'|$, alors : $s(G) \leq n - n' + s(G')$.

Considérons $G_{X-X'}$ et ses différentes composantes connexes $G_{X_1}, G_{X_2}, \ldots, G_{X_q}$, notons $|X_i| = n_i \quad i = 1, \ldots, q$. Pour chaque G_{X_i} on a donc $s(G_{X_i}) \leq n_{i-2}$. Soit $\mathcal{C}_i$ un pseudo-cycle-hamiltonien d'ordre $s(G_{X_i})$ de $G_{X_i} \quad i = 1, \ldots, q$.



G étant connexe, pour tout i,

il existe deux sommets $\{x_i, y_i\}$ tels que

1) $x_i \in X_i$

$y_i \in X'$

2) $[x_i, y_i] \in E$

Soit $\mathcal{C}'$ un pseudo-cycle-hamiltonien de G', de longueur $n' + s(G')$.

Considérons le cycle $\mathcal{C}$ de G défini par :

$$\mathcal{C} = \left(\bigcup_{i=1}^{q} \mathcal{C}_i \right) \cup \mathcal{C}' \cup 2 \{ [x_i, y_i] \}_{i=1,\ldots,q}$$

on a $|\mathcal{C}| = \sum_{i=1}^{q} |\mathcal{C}_i| + |\mathcal{C}'| + 2q$

$$|\mathcal{C}| = \sum_{i=1}^{q} (n_i + s(G_{X_i})) + n' + s(G') + 2q$$

$$|\mathcal{C}| \leq \sum_{i=1}^{q} n_i + \sum_{i=1}^{q} (n_i - 2) + n' + s(G') + 2q$$

$$|\mathcal{C}| \leq 2n - n' + s(G')$$

Donc $s(G) \leq |\mathcal{C}| - n$, d'où le résultat.

Corollaire 1

Si G possède un cycle de longueur l, on a $s(G) \leq n - 1$. En effet le sous-graphe engendré par ce cycle vérifie $n' = l$ et $s(G') = 0$.

Corollaire 2

Si $G = (X, E)$ est un graphe simple 2-connexe dont les sommets sont indexés par ordre croissant : $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \ldots \leq d(x_n)$ et vérifient $\forall j \neq k \quad d_j \leq j \, , \, d_k \leq k \Rightarrow d_j + d_k \geq C$ pour un entier c donné, alors $s(G) \leq n - c$.

Il suffit pour cela de considérer le résultat de J.A.Bondy [8] et le corollaire 1 précédent.

Corollaire 3

Si $G = (X, E)$ est 2-connexe et tel que $\underset{x \in X}{\text{Min}} \; d_G(x) \geq \frac{c}{2}$ pour un entier c donné, alors $s(G) \leq n-c$.

De même que le précédent ce résultat découle du corollaire 1 en appliquant à G le théorème de Dirac [17].

A ce stade une question se pose immédiatement : est-il possible de supprimer ou même seulement affaiblir l'hypothèse de 2-connexité dans l'énoncé de ces deux corollaires ? Le théorème 1 répondra en ce qui concerne le corollaire 3. Pour le corollaire 2 nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture 1

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple dont la suite des degrés est croissante : $d_G(x_1) \leq d_G(x_2) \leq \ldots \leq d_G(x_n)$;si pour tous les couples d'indices j et k tels que :

1) $j < k$

2) $d_G(x_j) \leq j$ et $d_G(x_k) \leq k - 1$

3) $[x_j, x_k] \notin E$

On a : $d(x_j) + d(x_k) \geq c$; alors : $s(G) \leq n - c$.

Corollaire 1 bis

Soit $G = (X, E)$ ayant q cycles élémentaires disjoints $C_1, C_2, \ldots, C_q$

de longueurs $l_1, l_2, \ldots, l_q$ $(q \geq 2)$. Alors :

$$s(G) \leq n - \sum_{i=1}^{q} l_i + 2(q-1)$$

Preuve :

Nous montrons par récurence sur q que G contient un sous-graphe partiel G' de $n' \leq n$ sommets, vérifiant $s(G') \leq n' - \sum_{i=1}^{q} l_i + 2(q-1)$.

Pour $q = 2$, G contient deux cycles élémentaires disjoints C_1 et C_2. Soit $\mu = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$ une chaîne élémentaire de G telle que $x_1 \in C_1$, $x_k \in C_2$ et $x_i \notin C_1 \cup C_2$ pour $i \neq 1,k$; le sous-graphe partiel G' formé de C_1, μ, C_2 vérifie $n' = l_1 + l_2 + k - 2$ et $s(G') = k = n' - l_1 - l_2 + 2$.

Pour un graphe contenant $q' < q$ cycles élémentaires disjoints, supposons notre résultat vérifié, et soit G un graphe avec q cycles élémentaires disjoints. Définissons un nouveau graphe H ayant pour ensemble de sommets $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_q\}$ en bijection avec l'ensemble $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ des cycles donnés de G, deux sommets C_i et C_j de H étant adjacents si et seulement s'il existe une chaîne élémentaire de G reliant un sommet de C_i à un sommet de C_j, n'ayant pas de points dans $(\bigcup_{k \neq i,j} C_k)$. H est connexe puisque G l'est, il a plus de 2 sommets, il existe donc dans H un sommet qui n'est pas d'articulation, soit c_i.

Dans le graphe G_{X-C_i} les cycles C_j, $j \neq i$, sont tous dans la même composante connexe, d'après le choix de c_i. D'après notre hypothèse d'induction cette composante connexe contient un sous-graphe partiel $G' = (X', E')$ tel que $s(G') \leq n' - \sum_{j \neq i} l_j + 2(q-2)$, et bien sûr $X' \cap C_i = \emptyset$. Soit μ une chaîne de G de longueur minimale reliant un sommet de C_i à un sommet de X' $\mu = [x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Il est clair que le sous-graphe partiel G" formé de G', μ et C_i, vérifie : $s(G") \leq n" - \sum_{j=1}^{q} l_j + 2(q-1)$, puisque $n" = n' + k - 2 + l_i$ et que $s(G") = s(G') + k$. G" est donc le sous-graphe partiel cherché pour G.

D'après le théorème on a donc : $s(G) \leq n - n' + s(G')$ soit

$$s(G) \leq n - \sum_{i=1}^{q} l_i + 2(q-1).$$

...

Corollaire 2

Si G est 2-connexe posons $d = \underset{X}{\text{Min}}\ d(x)$; s (G) vérifie alors:

$s(G) \leq \text{Min}\{0, n - 2d\}$.

Si $d \geq \frac{n}{2}$ le théorème de Dirac donne G hamiltonien, d'où $s(G) = 0$.

Si $d < \frac{n}{2}$ le théorème de D.R.Woodal [58] assure l'existence d'un cycle de longueur $l \geq 2d$, d'où le résultat.

Corollaire 3

Si G est k-connexe et de diamètre δ alors :

$$s(G) \leq \begin{cases} n - k\delta + 2k + 4 & \text{si n est pair} \\ n - (k-1)\delta + 2k - 6 & \text{si n est impair.} \end{cases}$$

Preuve :

Soient a et b deux sommets extrémités d'une chaîne, diamètre de G, $d(a,b) = \delta$; d'après le théorème de Menger [46] il existe k chaînes élémentaires disjointes sauf en a et b, ayant pour extrémités a et b et de longueur supérieure ou égale à δ.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_k$ ces chaînes et $l_1, \ldots, l_k$ leurs longueurs. Soit G' le sous-graphe partiel formé par $C_1, C_2, \ldots, C_k$; le nombre de sommets de G' est $\sum_{i=1}^{k} (l_i - 1) + 2 = \sum_{1}^{k} l_i - k + 2$ et

$$s(G') = \sum_{i=1}^{k} l_i - \left(\sum_{i=1}^{k} l_i - k + 2\right) = k - 2 \quad \text{si k est pair.}$$

On a d'après la proposition 3 :

$$s(G) \leq n - \sum_{1}^{k} l_i + k - 2 + k + 2$$

Soit $s(G) \leq n - k\delta + 2k + 4$.

Si n est impair on prend G' formé par $C_1, \ldots, C_{k-1}$, d'où :

$$s(G) \leq n - \left(\sum_{i=1}^{k-1} (l_i - 1) + 2\right) + k - 3 \Rightarrow s(G) \leq n - (k-1)\delta + 2k - 6$$

Proposition 4

Si G admet un point d'articulation $\underset{=}{a}$, soit $P_1, \ldots, P_q$ les pièces relatives à $\underset{=}{a}$ dans G, on a alors $s(G) = \sum_{i=1}^{i=q} s(P_i) + q - 1$.

...

Preuve :

Pour $i = 1, \ldots, q$ soient $\mathcal{C}_i$ pseudo-cycle-hamiltonien d'ordre $s(P_i)$ de P_i. $(\bigcup_{i=1}^{q} \mathcal{C}_i) = \mathcal{C}$ est un pseudo-cycle-hamiltonien de longueur

$$l = \sum_{i=1}^{q} (n_i + s(P_i))$$

où $n_i = |P_i|$, et donc :

$$s(G) \leq \sum_{i=1}^{q} s(P_i) + q - 1$$

Inversement si $\mathcal{C}$ est un pseudo-cycle-hamiltonien de G, d'ordre $s(G)$; les $(\mathcal{C} \cap P_i) = \mathcal{C}_i$ sont des pseudo-cycles-hamiltoniens de chaque pièce P_i, et donc la longueur $l(\mathcal{C}_i)$ vérifie :

$$l(\mathcal{C}_i) \geq n_i + s(P_i) \quad \text{d'où} \quad l(\mathcal{C}) \geq \sum_{1}^{q} n_i + \sum_{1}^{q} s(P_i),$$

d'où l'inégalité inverse.

Corollaire 1

Soit $G = (X, E)$ ayant un point d'articulation a et $G_{X_1}, \ldots, G_{X_q}$ les composantes connexes de $G_{X-\{a\}}$, alors :

$$s(G) \leq \sum_{i=1}^{q} s(G_{X_i}) + 2q - 1 .$$

Pour $i = 1, \ldots, q$ soit $\mathcal{C}_i$ un pseudo-cycle-hamiltonien de G_{X_i}, de longueur minimale $|X_i| + s(G_{X_i})$; un pseudo-cycle hamiltonien de la pièce P_i engendrée par $X_i \cup \{a\}$, de longueur l_i minimale, vérifiera donc: $l_i \leq |X_i| + s(G_{X_i}) + 2$. D'après la proposition 4 on a donc :

$$s(G) \leq \sum_{i=1}^{q} s(P_i) + q - 1 \Rightarrow s(G) \leq \sum_{1}^{q} (s(G_{X_i}) + 1) + q - 1 = \sum_{i=1}^{q} s(G_{X_i}) + 2q - 1$$

Corollaire 2

Soit $G = (X, E)$ ayant un sommet d'articulation unique, pas de sommets pendants et q blocs dont t sont des triangles ; $s(G) \leq n - 2q + t + 2$.

Soient $B_1, \ldots, B_q$ les blocs de G ; si $|B_i| < 4$ on a donc $|B_i| = 3$ et $d_{B_i}(x) = 2$ pour tout x de B_i, donc $B_i = C_3$ et $s(B_i) = 0$.

Si $|B_i| \geq 4$, pour tout x de B_i on a $d_{B_i}(x) \geq 2$ et $2 \leq \frac{n}{2}$, donc il existe un cycle de longueur $l \geq 4$ dans B_i, d'après le résultat de Woodall déjà cité. Ainsi $s(B_i) \leq |B_i| - 4$.

Donc $s(G) = \sum_{i=1}^{q} s(B_i) + q - 1$, si q' est le nombre de blocs B_i de cardinal supérieur ou égal à 4, on a $s(G) \leq \sum_{i=1}^{q'} (|B_i| - 4) + q - 1$.

Soit: $s(G) \leq n - 2t + q' - 1 - 4q' + q - 1$

$$s(G) \leq n + q - 3q' - 2t + 2 \Rightarrow s(G) \leq n - 2q + t + 2$$

car $q' = q - t$.

Proposition 5

Soient $G = (X, E)$ et $\{X_i\}_{i=1,\ldots,q}$ partition de X, alors :

$$s(G) \leq \sum_{i=1}^{q} s(G_{X_i}) + 2q - 2$$

Preuve :

Soit $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\} = Z$ un ensemble ayant q éléments. Considérons sur Z le graphe $(Z, F) = \tilde{G}$ dont les arêtes sont définies par : $[z_i, z_j] \in F \Leftrightarrow \exists x \in X_i, \exists y \in X_j, [x,y] \in t$. G étant connexe, $\tilde{G}$ l'est également, soit $\tilde{T}$ un arbre graphe-partiel de $\tilde{G}$. Pour chaque arête $[z_i, z_j]$ de F choisissons une arête $[z'_i, z'_j]$ de E telle que $z'_i \in X_i$, $z'_j \in X_j$. Le s-graphe-partiel T de G ainsi formé est une forêt.

Soient $\mathcal{C}_i$ $i=1,\ldots,q$ des pseudo-cycles-hamiltoniens d'ordres $s(G_{X_i})$ des G_{X_i} ; en décrivant chaque $\mathcal{C}_i$ une fois et les arêtes de T deux fois, on réalise un pseudo-cycle-hamiltonien de G qui a donc pour longueur :

$$l(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{q} l(\mathcal{C}_i) + 2(q-1), \text{ donc } s(G) \leq \sum_{1}^{q} (n_i + s(G_{X_i})) + 2(q-1) - n,$$

d'où le résultat.

Corollaire 1

Soit θ l'indice de partition en cliques de $G = (X, E)$, alors $s(G) \leq 2(\theta - 1)$. Pour $\{X_i\}_{i=1,\ldots,\theta}$ tels que les G_{X_i} partitionnent G en cliques, on a $s(G_{X_i}) = 0$, d'où la majoration indiquée.

Corollaire 2

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, $\mu(G)$ le plus petit nombre de cycles élémentaires ou de sommets isolés qui partitionnent X, alors $s(G) \leq 2(\mu(G) - 1)$.

En effet, pour les différents cycles ou points isolés $s = 0$ si l'on convient de poser $s(\{x\}) = 0$ pour un point isolé ; on vérifie que cette convention est bien cohérente avec le résultat précédent.

Cet indice $\mu(G)$ a été défini et étudié par J.C.Arditti [2] il ne semble pas qu'une inégalité, non triviale, en sens inverse soit simple à mettre en évidence.

Proposition 6

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple non hamiltonien alors $\pi(G) \leq s(G)$; si l'ensemble K des sommets de degré $n - 1$ est non vide alors $\pi(G) = s(G)$.

Démonstration

Soit $\mathcal{C}$ un pseudo-cycle hamiltonien de longueur minimum $n + s(G)$, $\mathcal{C} = [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+s(G)}}]$. Enlevons les s sommets de répétition rencontrés en premier en décrivant $\mathcal{C}$ selon l'indexation. On réalise ainsi une partition de X en chaînes élémentaires, de cardinal inférieur ou égal à $s(G)$, d'où $s(G) \geq \pi(G)$.

Inversement si x est un sommet de K (non vide) on a :

$$\pi(G) \leq \pi(G_{X-\{x\}}) \leq \pi(G) + 1 \quad ; \quad \text{soit } \pi = \pi(G_{X-\{x\}}).$$

Si $C_1, \ldots, C_\pi$ est une partition en chaînes de $G_{X-\{x\}}$, on peut réaliser un pseudo-cycle hamiltonien $\mathcal{C}$ de G, formé de l'union des cycles élémentaires $[x, C_i, x]$ pour $i = 1, 2, \ldots, \pi$. $\mathcal{C}$ a $\pi - 1$ répétitions du sommet x_1, et donc $s(G) \leq \pi(G)$.

Les majorations du paragraphe 3 du chapitre II peuvent être utilisées directement ici, nous donnons donc les résultats sans démonstration.

Corollaire 1

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple, si $K(G)$ désigne sa connectivité

et que $K = \{x \in X \text{ t.q } d_G(x) = n-1\} \neq \emptyset$, alors: $s(G) \leq \text{Max}\{0 ; \alpha(G) - K(G)\}$.

Corollaire 2

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple dont les sommets sont indexés par ordre croissant $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Si $K \neq \emptyset$ et si p est un entier tel que : $k < p < n$ et $d_k \leq k - p \Rightarrow d_{n+p-k} \geq n + k$. Alors: $s(G) \leq \text{Max}\{1, p\}$

Corollaire 3

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple et soit $H_k = \{x \in X \text{ t.q } d(x) \leq k\}$. S'il existe un entier p tel que $|H_k| < k + p$ pour $1 \leq p < \frac{n+p-1}{2}$, et si $\left|H_{\frac{n+p-1}{2}}\right| \leq \frac{n+p-1}{2}$ si $n + p$ impair et si $K \neq \emptyset$, alors $s(G) \leq \text{Max}\{1, p\}$.

Corollaire 4

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple ayant un ensemble $K \neq \emptyset$, alors :

$$s(G) \leq \text{Max}\{1; \text{Max}_{[x,y] \notin E} (n - d_G(x) - d_G(y))\}$$

Dans ces différents corollaires l'hypothèse $K \neq \emptyset$ est essentielle, par exemple pour le corollaire 1 le graphe ci-contre vérifie : $K = \emptyset$, $\alpha(G) = 2$, $K(G) = 1$, $s(G) = 2 > \alpha(G) - K(G)$.

Proposition 8

Soit $T = (X, E)$ un arbre dont on note P l'ensemble des sommets pendants, soit l la longueur maximale d'une chaîne de T ; alors :

$$s(T^2) \leq n - |P| - l + 1$$

Démonstration

Soit C une chaîne de longueur l de T, elle a donc pour extrémités deux sommets pendants et comporte $l + 1$ points.

Soit $I = X - (P \cup C)$, nous raisonnerons par récurrence sur $|I|$. Pour $|I| = 0$, le graphe T a un carré hamiltonien d'après [8], donc $s(T^2) = 0$ en ce cas $|P| + l - 1 = n$, donc le résultat est bien vérifié. Supposons-le établi jusqu'à $|I| \leq i - 1$ et montrons-le pour i:

Soit $\{y_i\}_{1,\ldots,k}$ les sommets pendants adjacents à un sommet de I (une chaîne max. C étant choisie dans T); l'arbre $T' = T_{X-\{y_i\}}$ a $|P|-k+1$

sommets pendants et $|I'| = |I| - 1$; d'après l'hypothèse de récurrence on a donc $s(T'^2) \leq (n - k) - (|P| - k + 1) - 1 + 1 \Rightarrow s(T'^2) \leq n - |P| - 1$.

Soit $\mathcal{C}$ un cycle pseudo-hamiltonien de T'^2 d'ordre $s(T'^2)$ et $\mathcal{C}'$ un cycle pseudo-hamiltonien de $T^2_{\{y_i\}\ 1,\ldots,k}$ (qui est une clique). Le graphe partiel $G' = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ de T^2 vérifie $s(G') \leq s(\mathcal{C}) + s(\mathcal{C}')$, et donc $s(T'^2) \leq n - |P| - 1 + 1$, ce qu'il fallait démontrer.

N.B. On peut reformuler de la manière plus claire :

Soit $T = (X, E)$ un arbre et C une chaîne de longueur maximum dans G, soit P l'ensemble des sommets pendants et $I = X-(C \cup P)$, alors $s(T^2) \leq |I|$.

Théorème

Soit G un graphe simple connexe ayant $|X| = n$ sommets. S'il existe un entier p tel que $0 \leq p \leq n-2$, vérifiant $d_G(x) \geq \frac{n-p}{2}$ pour tout x de X, sauf éventuellement pour un point d'articulation $\underline{a}$ fixé dans X, alors $s(G) \leq p$.

Démonstration

Si G est 2-connexe, on a $\underset{x \in X}{\text{Min}}\ d(x) \geq \frac{n-p}{2}$ d'après un théorème dû à Dirac [17]; nous pouvons donc déduire l'existence d'un cycle élémentaire de longueur $l \geq n - p$ dans G. Le corollaire 1 de la proposition 3 permet donc de conclure: $s(G) \leq p$.

Si G possède un point d'articulation, nous déduirons le résultat cherché du lemme suivant, que nous établirons par induction sur n :

Lemme :

Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe ayant un point d'articulation $\underline{a}$, et p un entier tel que $0 \leq p \leq n - 2$, vérifiant :

$$\forall x \in X - \{a\},\ d_G(x) \geq \frac{n - p}{2}\ ;\ \text{alors}\ s(G) \leq p.$$

Notons que si G est un graphe répondant aux hypothèses du Lemme et que nous désignons par $C_1, C_2, \ldots C_q$ les composantes connexes de $G_{X-\{a\}}$

on a $n - 1 = \sum_{i=1}^{q} |C_i|$ et $\frac{n-p}{2} \leq d_G(x) \leq |C_i \cup \{a\}| - 1$ pour tout x de C_i $i = 1,\ldots,q$; donc $|C_i| \geq \frac{n-p}{2}$, d'où $q \leq 2 . \frac{n-1}{n-p}$

A. Démonstration du lemme pour quelques valeurs particulières de l'entier p : 1,2,n-6, n-5, n-4, n-3, n-2.

* Pour p = 1, d'après la remarque ci-dessus, on a q =2. $G_{X-\{a\}}$ a donc deux composantes connexes de n_1 et n_2 sommets avec $n_i \geq \frac{n-1}{2}$; puisque $n_1 + n_2 = n - 1$ on a donc $n_1 = n_2 = \frac{n-1}{2}$, et G est formé de deux cliques de $\frac{n+1}{2}$ sommets ayant un seul point commun, donc $s(G) = 1 = p$.

* Pour p = 2, on a $q \leq 2 . \frac{n-1}{n-2}$, donc q = 2 pour $n \geq 5$.

Examinons séparément n = 3 et n = 4 : pour n = 3 G est une chaîne élémentaire ou un triangle, donc $s(G) \leq 1$. Pour n = 4, on a $s(G) \leq n - 2 = 2 = p$. Pour $n \geq 5$, $n_1 + n_2 = n - 1$ et $n_i \geq \frac{n-2}{2}$; nous avons donc deux possibilités :

$n_1 = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$, $n_2 = \frac{n-2}{2}$ si n pair,

$n_1 = \frac{n-1}{2}$, $n_2 = \frac{n-1}{2}$ si n impair.

n pair.

La pièce P_2 formée de C_2 et du point d'articulation a, est une clique, donc $s(P_2) = 0$.

Dans la pièce P_1 associée à C_1, tous les sommets de C_1 différents de a ont un degré $d_{P_1}(x) \geq \frac{n-2}{2}$ et $d_{G_{C_1}}(x) \geq \frac{n-2}{2} - 1$. Ainsi pour $n \geq 8$ on a : $d_{G_{C_1}}(x) \geq \frac{n-4}{2} \geq \frac{n}{2} = \frac{1}{2} . \frac{n}{2}$.

Pour n = 7 , $d_{G_{C_1}}(x) \geq \frac{3}{2} \Rightarrow d_{G_{C_1}}(x) \geq 2 \geq \frac{1}{2} . \frac{7}{2}$; pour $n \leq 6$ on a trivialement $s(G) \leq 2$. Pour $n \geq 7$, G_{C_1} vérifie les hypothèses du théorème de Dirac et donc est hamiltonien; la pièce P_1 est telle que $s(P_1) \leq 1$, et donc : $s(G) = s(P_1) + s(P_2) + 1 \leq 2 = p$.

n impair, et $n_1 = n_2 = \frac{n-1}{2}$ pour $x \in X - \{a\}$; $d_G(x) \geq \frac{n-2}{2}$, ainsi chaque $x \neq a$ est adjacent à a et les pièces P_1, P_2 sont des cliques, d'où $s(G) = 1 < p$.

* pour $p = n - 2$, on a $s(G) \leq n - 2 = p$ d'après la proposition 1.

* pour $p = n - 3$, $\forall x \in X$, $d(x) > 1$, G n'est pas un arbre, donc possède au moins un cycle; d'après le corollaire 1 de la proposition 3 , on a donc: $s(G) \leq n - 3$.

* pour $p = n - 4$, $d_G(x) \geq 2$, donc G possède un cycle élémentaire; s'il est de longueur $l \geq 4$, on sait que $s(G) \leq n$; supposons donc que tous les cycles de G soient des triangles . Soit $\{a', b, c\}$ un tel triangle, dans le graphe obtenu en enlevant à G ses trois arêtes, a', b, c, appartiennent à trois composantes connexes différentes ; pour $n > 3$ une des composantes contient au moins un cycle et donc G possède un sous-graphe partiel contenant deux triangles ayant au plus un sommet commun, les corollaires de la proposition 3 permettent de conclure: $s(G) \leq n - 4$.

* pour $p = n - 5$ et $p = n - 6$, on a $d_G(x) \geq 3$ pour $x \neq a$; il faut montrer que $s(G) \leq n - 6$. Supposons que G n'a pas de cycles de longueur $l \geq 6$, sans quoi le problème est résolu. Les cas $p = 0, 1, 2$ ont été vus précédemment, on peut donc supposer que $p \geq 3$, donc $n \geq 8$.

Soit C un cycle de G de longueur maximum notée l. Puisque $d_G(x) \geq 3$ pour $x \neq a$, on a $m(G) \geq \frac{1}{2}(3(x-1) + 2)$, donc $m(G) \geq [\frac{3}{2}(n - 1)] + 1$. D'après la prop.1 §1, on sait alors qu'il existe dans G un cycle de longueur $l \geq 4$. Dans chaque pièce P de G relative au point a, les degrés sont minorés par 3, sauf pour a. On a donc : $m(P) \geq \frac{1}{2}(3(|P| - 1) + 1)$, soit $m(P) > [\frac{3}{2}(|P|-1)]$; donc chaque pièce contient un cycle de longueur $l \geq 4$. Le graphe G contient donc au moins deux cycles de longueur $l \geq 4$ disjoints, et donc $s(G) \leq n - 6$ d'après la proposition citée.

N.B. Dans la démonstration de ces cas particuliers on utilise le résultat suivant la proposition 1, § 1:

Si G = (X, E) est un graphe simple ayant n sommets et m arêtes, avec $m > [\frac{3}{2}(n-1)]$, alors G possède un cycle élémentaire de longueur $l \geq 4$.

B. Supposons que notre lemme est établi pour les graphes ayant $n' < n$ sommets, et considérons un graphe G ayant n sommets, a, point d'articulation, vérifiant : $x \neq a \Rightarrow d_G(x) \geq \frac{n-p}{2}$; montrons que $s(G) \leq p$.

Si $q = 2$ $\quad s(G) \leq s(G_{c_1}) + s(G_{c_2}) + 3$.

Pour $x \in C_i$:

$$d_{G_{c_i}}(x) \geq \frac{n-p-2}{2} = \frac{n_i - (n_i - n + p + 2)}{2}$$

posons $p_i = \text{Max}\{0 ; n_i - n + p + 2\}$; si $p_i = 0$, G_{c_i} hamiltonien et $s(G_{c_i}) = 0$.

Si $p_i > 0$ - ou bien G_{c_i} 2 - connexe et donc $s(G_{c_i}) \leq p_i$.

- ou bien $K(G_{c_i}) = 1$, et l'hypothèse de récurrence fonctionne, et donc $s(G_{c_i}) \leq p_i$.

On obtient donc finalement :

- Soit $s(G) \leq n_4 - n+p+2 + n_2 - n + p + 2 + 3$, c'est-à-dire $s(G) \leq 2p - n + 6$.

- Soit $s(G) \leq 3$ si $n_i - n + p + 2 \leq 0 \quad i = 1, 2$.

- Soit $s(G) \leq n_1 - n + p + 2 + 3$, si $p_2 = 0$ par exemple.

Seuls le 1er cas et le 3eme posent donc des problèmes.

* Pour le 1er cas, si $p_i \geq 1$, $n_i \geq n - p - 1 \Rightarrow n_1 + n_2 = n-1 \geq 2n-2p-2$ $\Rightarrow p \geq \frac{n-1}{2}$.

Pour $p \leq n - 6$ il est clair que $s(G) \leq p$.

Il faut donc examiner à part $p = n-2, n-3, \ldots, n-6$ (voir A)

...

*Pour le 3eme cas, $s(G) \leq n_1 - n + p + 5 \leq p$ si $n_1 - n + 5 \leq 0$, c'est-à-dire $n_1 \leq n - 5$. Dans le cas contraire $n_1 > n - 5$, c'est-à-dire $n_1 \geq n - 4$; cela signifierait $n_2 \leq 3$, donc $d_{G_{C_2}}(x) \leq 3 \quad (x \in C_2)$. Soit donc $\frac{n-p}{2} \leq 3 \Rightarrow n - p \leq 6$, soit $p \geq 6$, cas déjà examiné.

Si $q \geq 3$

Soit C_i une composante de $G_{X-\{a\}} = G'$; $G'' = G_{X-C_i}$ vérifie l'hypothèse de récurrence pour a point d'articulation et $p'' = M\{p - n_i, 0\}$, car :

$$d_{G''}(x) \geq \frac{n-p}{2} = \frac{n - n_i - p - n_i)}{2} \quad , n(G'') < n, \text{et donc } s(G'') \leq p''.$$

Dans G_{C_i} :

$$d_{G_{C_i}}(x) \geq \frac{n-p}{2} - 1 = \frac{n_i - (p-n+n_i+2)}{2} \Rightarrow s(G_{C_i}) \leq p_i = M\{0, p-n+n_i+2\}.$$

Quatre cas doivent être examinés :

1) $p_i = p'' = 0$
2) $p_i = 0 \quad p'' \geq 1$
3) $p'' = 0 \quad p_i \geq 1$

} identiques

4) $p'' \geq 1 \quad p_j \geq 1$

Dans le 1er cas $s(G) \leq 7 \leq p$.

Dans le 2eme cas $s(G) \leq p'' + 2$, soit $s(G) \leq p - n_i + 2$; donc $s(G) \leq p$ si $n_i - 2 \geq 0$ c'est-à-dire $\frac{n-p}{2} \geq n_i \geq 2$, ou encore $p \leq n - 4$; ce qui est bien vérifié (voir étude du A).

Dans le 3eme cas $s(G) \leq p_i + 2$ soit $s(G) \leq p - n + n_i + 2$.

$s(G) \leq p$, si l'on a $-n + n_i + 2 \leq 0$, soit $n_i \leq n - 2$, ce qui est toujours vérifié.

Dans le 4eme cas $s(G') \leq p'' + p_i + 2 \Rightarrow s(G) \leq p - n_i + p - n + n_i + 8$, soit $s(G) \leq 2p - n + 8 \quad s(G) \leq p$ si $p \leq n - 4$ (voir A).

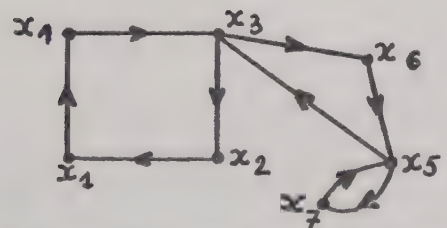
Plus généralement il semble que toutes les conditions portant sur les degrés de sommets d'un graphe - Dirac, Bondy, Ore, Chvatal - et permettant de conclure à l'existence d'un cycle de longueur $l \geq n - p$ (pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n - 2$) en faisant l'hypothèse de 2-connexité, permettent de conclure $s(G) \leq p$, dans le cas où $K(G) = 1$. *

Une autre voie ouverte consiste à définir des concepts analogues pour des 1-graphes fortement connexes, sans boucles ni arcs multiples. Il semble qu'une des manières d'envisager une généralisation dans cette direction est de définir :

- un circuit simple $\mathcal{C}$ (sans répétition d'un même arc) sera dit d'ordre s, dans un graphe G orienté si chaque sommet de G figure au moins une fois sur $\mathcal{C}$, et si la somme des répétitions des différents sommets est s.

- on appelle ordre pseudo-hamiltonien de G le plus petit entier s (G) tel qu'il existe un circuit $\mathcal{C}$ de G ayant exactement s répétitions de sommets.

Exemple :



$\mathcal{C} = (x_1, x_4, x_3, x_6, x_5, x_7, x_5, x_3, x_2)$ est un pseudo-circuit-hamiltonien de G ayant $s = 2$ répétitions.

H. Meyniel propose la conjecture suivante :

Conjecture 3

Soit G un 1-graphe orienté fortement connexe ayant n sommets, si pour tout couple de sommets x, y non adjacents dans G on a :

$$d^+(x) + d^-(x) + d^+(y) + d^-(y) \geq 2n - 2p - 1$$ pour un entier p tel que $0 \leq p \leq n - 3$, alors G est pseudo hamiltonien d'ordre $s(G) \leq p$.

Si l'on démontrait cette conjecture on généraliserait le théorème bien connu de A. Ghoulia-Houri [23] et celui de H. Meyniel [48].

En considérant le graphe orienté obtenu à partir d'un graphe simple en remplaçant chaque arête par deux arcs de directions opposées, on retrouverait le théorème 1 de ce chapitre.

(*) Récemment J.C.Bermond a démontré le résultat suivant :

Si $G = (X, E)$ vérifie : $\forall x \in X \quad \forall y \in X$, $d(x) + d(y) \geq n-p$, alors $s(G) \leq p$.

Chapitre 4. GRAPHES PARFAITS POUR UNE PROPRIETE P, NOMBRE & INDICE ACHROMATIQUES.

§ 1 - Graphes parfaits pour une propriété P.

Définition

Un graphe simple G = (X, E) étant donné, nous dirons qu'il est P-parfait pour la propriété P, si pour toute partie X' de X le sous-graphe $G_{X'}$ de G possède la propriété P.

Cette définition a son origine dans la notion de graphes parfaits introduite par C. BERGE [3] et dont il a déjà été fait mention plusieurs fois. Nous donnons d'abord quelques exemples de graphes P-parfaits, la propriété P est le plus souvent l'égalité de deux invariants entre lesquels il n'y a qu'une inégalité en général.

Exemples :

- Si r (G) désigne le cardinal minimum d'un recouvrement des sommets de G par une famille d'arêtes, τ (G) le cardinal minimum d'un transversal des arêtes, et ν (G) le cardinal maximum d'un couplage de G, un graphe biparti vérifie :

(1) $\alpha(G) = r(G)$ $\quad P_1$

(2) $\tau(G) = \nu(G)$ $\quad P_2$

(3) $q(G) = \underset{X}{\text{Max}}\, d_G(x)$ $\quad P_3$

Inversement chacune de ces propriétés ne suffit pas pour assurer qu'un graphe qui la possède est biparti ; par contre si l'on considère un graphe P-parfait pour l'une de ces propriétés on peut conclure sans difficulté qu'il est biparti puisque dans le cas contraire il possèderait un cycle impair

C_{2p+1} de longueur minimum, donc sans corde, vérifiant :

$$\nu(C_{2p+1}) = p \qquad r(C_{2p+1}) = p+1 \qquad q(C_{2p+1}) = 3$$
$$\tau(C_{2p+1}) = p+1 \qquad \alpha(C_{2p+1}) = p \qquad \text{Max}_{X \, C_{2p+1}} d(x) = 2$$

- Avec V.Chvatal [15] on définit la cyclabilité $\xi(G)$, d'un graphe G, comme le plus grand entier tel que :

$$\forall X' \subset X, \quad |X'| \leq \xi(G) \Rightarrow \exists \text{ un cycle élémentaire de G contenant tous les sommets de } X'.$$

On peut convenir par commodité que :

$$K(G) = 1 \Rightarrow \xi(G) = 1$$
$$K(G) = 0 \Rightarrow \xi(G) = 0$$

Un corollaire du théorème de Menger [47] assure que :

$$K(G) \leq \text{Min}\{\xi(G), n-1\}$$

pour tout graphe G, et si G n'est pas une clique on a : $K(G) \leq \xi(G)$; la proposition suivante caractérise les graphes P-parfaits pour la propriété P

$$K(G) = \text{Min}\{\xi(G), n-1\}$$

Proposition 1

Un graphe $G = (X, E)$ est P-parfait pour P : $K(G) = \text{Min}\{\xi(G), n-1\}$ si et seulement si chaque bloc de G est une clique.

Preuve :

Soit B un bloc de G qui n'est pas une arête, et soient x et y deux sommets quelconques de B ; B est 2-connexe, donc il existe un cycle C élémentaire de B, qui contient x et y, et donc $\xi(G_C) = |C|$ et $K(G_C) = |C| - 1$. En conséquence C_C est une clique et $[x,y]$ est une arête de G ; donc tout bloc de G est une clique. Inversement, si tout bloc de G est une clique, il est clair que tout sous-graphe est de connectivité 1 ou 0, ou bien est une clique. Il vérifie donc P.

...

- le nombre chromatique $\gamma(G)$ est relié à celui du complémentaire $\gamma(\overline{G})$ de G par la relation bien connue de Nordhaus et Gadhum [49] : $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$; on ne sait pas caractériser la classe des graphes vérifiant l'égalité, par contre les graphes P-parfaits pour cette propriété peuvent tous être construits :

Propriété 1

Soit G un graphe P-parfait, alors son diamètre vérifie: $\delta(G) \leq 2$. En effet si la chaîne élémentaire P_4 ayant quatre sommets était un sous-graphe de G, on aurait $\gamma(P_4) = \gamma(\overline{P_4}) = 2$ et $|X'| + 1 = 5$.

Corollaire 1

Soit G un graphe P-parfait, alors G est triangulé.

Les seuls cycles sans cordes vérifiant P sont C_3 et C_5 ; par suppression d'un sommet, C_5 donne une chaîne P_4 ; ainsi seuls les cycles C_3 peuvent être des sous-graphes de G.

Corollaire 2

Soit G un graphe P-parfait, alors G est parfait au sens usuel.

Propriété 2

G est un arbre P-parfait si et seulement si c'est une étoile $K_{n-1,1}$.

Si G est un arbre P-parfait son diamètre est 2 et c'est donc une étoile. Inversement si G est une étoile, tout sous-graphe de G est soit une étoile, soit un stable, soit une arête ; dans ces trois cas la relation de Nordhaus - Gadhum est vérifiée.

Propriété 3

G est P-parfait si et seulement si G_{X-I} est P-parfait.

I désigne ici, comme dans la suite, l'ensemble des sommets isolés de G.

En effet si G_{X-I} est P-parfait, pour toute partie X' de X on a :

$$\gamma(G_{X'-I'}) + \gamma(\overline{G_{X'-I'}}) = |X'-I'| + 1$$

$$\gamma(G_{X'-I'}) = \gamma(G_{X'}) \text{ et } \gamma(\overline{G_{X'}}) = \gamma(\overline{G_{X'-I'}}) + \gamma(K_{|I'|})$$

puisque $\overline{G} = J(\overline{G}_{X'-I'}, K_{|I'|})$

où $K_{|I'|}$ désigne la clique de cardinal $|I'|$ et I' l'ensemble des sommets isolés de $G_{X'}$.

Ainsi $\gamma(G_{X'}) + \gamma(\overline{G_{X'}}) = \gamma(G_{X'-I'}) + \gamma(G_{X'-I'}) + |I'| = |X'| + 1$

Propriété 4

Soit G un graphe P-parfait sans point isolé, alors G est connexe. En effet si G avait plusieurs composantes connexes il admettrait comme sous-graphe un couplage de deux arêtes, un tel sous-graphe vérifie : $\gamma(G') + \gamma(\overline{G}') = 4$ et $|X'| = 5$.

Nous pouvons donc nous restreindre à l'étude des graphes P-parfaits connexes.

Proposition 2

Soit G un graphe P-parfait connexe, qui n'est pas une clique, alors G est le joint selon une chaîne élémentaire P_3 d'un stable S_p de cardinal P, d'une clique K_q de cardinal q, et d'un graphe G', P-parfait, ayant n-p-q sommets. Eventuellement G' est vide et $G = J(S_p, K_q)$.

Inversement tout graphe formé de cette manière est P-parfait.

Preuve :

G étant triangulé et de diamètre 2, possède une clique K_p (pour un entier $p \leq n - 2$) qui est un ensemble d'articulation de cardinal minimum $p = K(G)$ [4]. G_{X-K_p} n'est pas connexe, mais est P-parfait et donc il ne peut avoir plus d'une composante connexe non réduite a un point, ainsi :

- ou bien G_{X-K_p} est un stable S_{n-p}, et alors $G = J(S_{n-p}, K_p)$.
- ou bien G_{X-K_p} est l'union disjointe d'un stable S_q et d'un

...

sous-graphe G' de G, en ce cas $G = J_{P_3}(S_q, K_p, G')$. Dans chacun des deux cas on a bien un joint:

* si x et y sont deux sommets appartenant respectivement à S_q et K_p et que $[x,y]$ n'était pas une arête de G, l'ensemble $K_p - \{y\}$ serait d'articulation et de cardinal p - 1.

* si x et y sont deux sommets appartenant respectivement au sous graphe G' et à K_p et que $[x,y]$ n'était pas une arête de G, considérons une chaîne $x = x_o, x_1, \ldots, x_k$ de G' telle que $x_o, x_1, \ldots, x_{k-1}$ soient non adjacents à y, et que x_k le soit; une telle chaîne de longueur $k \geq 1$ existe toujours puisque G' est connexe et que y est adjacent a au moins un sommet de G', sans quoi $K_p - \{y\}$ serait un ensemble d'articulation de cardinal p - 1.

Soit z un sommet de S_q, la chaîne élémentaire $[x_o, x_1, \ldots, x_k, y, z]$ a une longueur supérieure ou égale à 3 et est un sous-graphe de G, d'où la contradiction cherchée.

Inversement si G est le joint d'une clique et d'un stable il est P-parfait d'après la propriété 3 ; si $G = J_{P_3}(S_q, K_p, G')$ son complémentaire $\overline{G}$ est formé de p points isolés et du joint $J(K_q, \overline{G}')$, d'où :

GP -parfait $\Leftrightarrow$ $J(K_q, \overline{G}')$ P -parfait $\Leftrightarrow$ G' P-parfait,

ce qui achève la démonstration.

Proposition 2

Tous les graphes P-parfaits peuvent être construits à partir d'un sommet ou d'une arête et des opérations :

A) Si G est P-parfait, on considère $\overline{G}$.

B) Si G est P-parfait, on construit $J(K_p, G)$ pour p quelconque.

C) Si G est P-parfait, on construit $J_{P_3}(S_q, K_p, G)$ pour p et q quelconques.

Inversement tous les graphes ainsi obtenus sont P-parfaits.

...

Chaque opération sur G, P-parfait, donne encore un graphe P-parfait, d'après les résultats qui viennent d'être établis. Si G est P-parfait de diamètre 2 (le cas des cliques est trivial), alors $G = J(K_p, S_q)$, ou bien $G = J_{P_3}(S_q, K_p, G_o)$ d'après la proposition 1 ; G_o désignant un sous-graphe P-parfait connexe ayant plus de un sommet.

Dans le premier cas G peut être construit aisément à l'aide des deux premières opérations. Dans le deuxième cas, si G_o est une clique sa reconstruction est évidente, sinon son diamètre est 2 et l'on itère le procédé. On obtient ainsi une succession de sous-graphes $G_1, G_2, \ldots, G_k$ dont le dernier est une clique (éventuellement un sommet isolé).

A partir de G_h obtenu par A et B on construit G par une suite de h opérations C.

Remarque

Pour la propriété P' : $\gamma(G) + \alpha(G) = n + 1$, on a :
G P-parfait $\Leftrightarrow$ G P'-parfait. Si G est P-parfait et que G' est un sous-graphe de G, alors G' est γ-parfait d'après le corollaire 2 de la propriété 1; donc

$\gamma(\overline{G}') = \omega(\overline{G}') = \alpha(G')$, d'où : $\gamma(G') + \alpha(G') = n' + 1$.

Si G est P'-parfait, pour un sous-graphe G' de G, on a :

$\gamma(G') + \alpha(G') = n' + 1$, donc $\gamma(G') + \omega(\overline{G}') = n' + 1$;

or $\omega(\overline{G}') \leq \gamma(\overline{G}')$, d'où $\gamma(G') + \gamma(\overline{G}') \geq n' + 1$.

La relation de Nordhaus-Gadhum donne l'inégalité inverse.

- La connectivité et l'arête-connectivité d'un graphe G sont reliées par la relation $K(G) \leq \lambda(G)$ [12]. Pour la propriété P: $K(G) = \lambda(G)$, on définit une classe de graphes P-parfaits qui n'est pas liée à celle des γ - parfaits de mainière simple ; les graphes P-parfaits pour $K(G) = \lambda(G)$ ont cependant la propriété remarquable suivante :

...

Proposition 3

Soit G (X, E) un graphe simple vérifiant $K(G_{X'}) = \lambda(G_{X'})$ pour toute partie $X' \subset X$, alors tout ensemble d'arête E' de cardinal $\lambda(G)$ tel que G - E' n'est pas connexe est un couplage ou un cocycle élémentaire associé à un sommet.

Preuve :

Si $\lambda = 1$, tout ensemble E' est réduit à un isthme pouvant être considéré comme un couplage de cardinal 1. Considérons donc dans la suite que $\lambda \geq 2$.

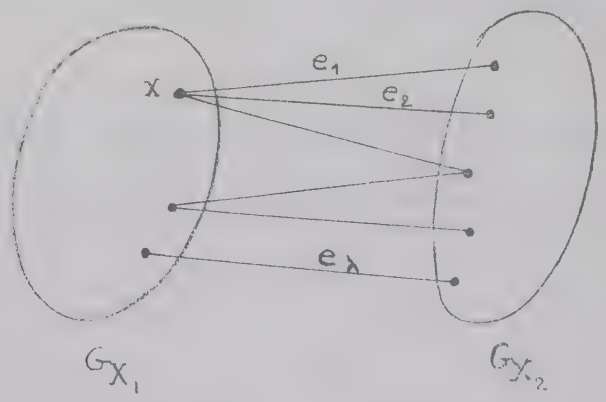
Soit $E' = \{e_1, e_2, \ldots, e_\lambda\}$ un ensemble d'arêtes de cardinal $\lambda = \lambda(G)$, et dont la suppression disconnecte G ; posons $G' = G - E'$, chacun des graphes $G' + e_i$ $i = 1, \ldots, \lambda$ admet e_i pour isthme, ainsi G' a deux composantes connexes G_{X_1} et G_{X_2}, et toutes les arêtes e_i ont une extrémité dans chacune d'elles.

Supposons que toutes les arêtes de E' ne forment pas un cocycle élémentaire associé à un sommet, ni un couplage, et soit x un sommet de G_{X_1} (par exemple), qui soit extrémité de deux arêtes de E'. On a donc :

$|X_1| > 1$.

$G_{X-\{x\}}$ est $(K(G) - 1)$-connexe, et donc: $\lambda(G_{X-\{x\}}) = K(G) - 1 = \lambda - 1$, puisque G est P-parfait.

Par ailleurs $\lambda(G_{X-\{x\}}) \leq \lambda - 2$ de par le choix de x, d'où la contradiction.



...

§ 2 - Nombre achromatique et graphes ψ - parfaits.

Un graphe $G = (X, E)$ étant donné, une coloration - au sens large du terme - des sommets de G est une partition de X, $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_i$. Si un sommet x appartient à la partie X_i de la partition, on dira que i est la couleur de x : $i = C(x)$. Une coloration de X est dite régulière si :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X, \ [x,y] \in E \Rightarrow C(x) \neq C(y)$$

Une coloration de X est dite complète, si pour tout couple i, j de couleurs, il existe des sommets x et y tels que : $C(x) = i$, $C(y) = j$, et $[x,y] \in E$.

Le nombre chromatique $\gamma(G)$ usuel est le nombre minimum de couleurs requises pour obtenir une coloration complète et régulière de X. De la même manière on définit le nombre achromatique $\psi(G)$ comme maximum de ce nombre de couleurs . Plusieurs résultats concernant $\psi(G)$ ont été publiés récemment [9] [10], depuis l'introduction de la notion par R.P. Gupta [24].

On a bien sûr: $\gamma(G) \leq \psi(G)$ pour tout graphe; on ne sait pas caractériser les graphes réalisant l'égalité ; par contre les graphes P-parfait pour la propriété $\gamma(G) = \psi(G)$ peuvent être bien étudiés, on les désignera par l'appellation: graphes ψ-parfaits.

Exemples :

Les cliques, les graphes multipartis complets, le cycle élémentaire C_4 sont des graphes ψ-parfaits.

Les sommets isolés n'intervenant pas dans les propriétés de coloration étuidées, nous supposerons que les graphes considérés en sont dépourvus.

Proposition 4

Soit $G = (X, E)$ un graphe ψ-parfait sans point isolé, son diamètre est 1 ou 2 s'il est connexe, ou bien, s'il ne l'est pas, G est union de deux cliques disjointes.

Si G' est une composante connexe de G, soit $D = [x_o, x_1, \ldots, x_\delta]$ un diamètre de G', $G\{x_o, x_1, \ldots, x_\delta\}$ est réduit à la chaîne élémentaire D. Seules les chaînes élémentaires de longueur 1 et 2 vérifient $\gamma = \psi$, et donc $\delta \leq 2$.

Si le graphe G avait trois composantes connexes distinctes (ou plus), il contiendrait comme sous-graphe un couplage de trois arêtes (puisqu'aucune composante n'est un sommet isolé). Un tel sous-graphe vérifierait $\gamma = 2$ et $\psi = 3$; ainsi G a deux composantes connexes au plus.

Si G a deux composantes connexes et que l'une n'est pas une clique, le sous-graphe H ci-contre figurerait dans G, dont une composante aurait pour diamètre 2. Ce sous-graphe vérifie $\gamma = 2$ et $\psi = 3$, ce qui est impossible.

H

Corollaire

Si G est ψ-parfait il n'admet pas de cycle élémentaire C_p sans cordes pour $p \geq 5$. En effet par suppression d'un sommet, ces cycles contiennent des chaînes élémentaires P_4.

Proposition 5

Si $(G_i)_{i=1,\ldots,p}$ est une famille de graphes simples ψ-parfaits, le joint des G_i selon une clique K_p est ψ-parfait.

Ceci résulte immédiatement d'un résultat de [25] .

On peut alors se demander si le joint d'une famille de graphes ψ-parfaits selon un graphe ψ-parfait H n'est pas ψ - parfait. Ce n'est pas vrai en général comme le montre l'exemple suivant :

...

H s_1 s_2 s_3

$G_1 = G_3 = P_3$

$G_2 = \{x\}$

$\gamma(J) = 3$ et $\psi(J) = 4$ $\qquad J = J_H(G_1, G_2, G_3)$

Théorème 1

Soit G un graphe ψ-parfait connexe, sa connectivité vérifie

$K(G) \geq n - \underset{X}{\text{Max}}\ d_G(x)$.

Preuve :

Le résultat est trivialement vrai pour n = 3 et 4. Supposons-le faux en général,et soit n le plus petit entier tel qu'il existe un graphe ayant n sommets,pour lequel il soit faux ; Posons $d = \underset{X}{\text{Max}}\ d_G(x)$,donc $K(G) < n-d$

* On a $d < n-1$,car pour $d = n - 1$, G est connexe et l'on a bien $K(G) \geq n - d$. En conséquence G n'est pas une clique, donc $\delta(G) = 2$.

* Soit $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_\mu\}$ un ensemble de sommets d'articulation, de cardinal minimum $\mu = K(G)$. $G_{X-\{x_1\}}$ a $D - \{x_1\}$ pour ensemble d'articulation de cardinal minimum,et donc :

$$K(G') \geq n - 1 - \underset{X-\{x_1\}}{\text{Max}}\ d_{G'}(x) \geq n - 1 - d \text{ et donc } \mu \geq n - d,$$

d'où la contradiction.

Remarque :

Certains graphes ψ-parfaits vérifient l'égalité $K(G) = n - \underset{X}{\text{Max}}\ d_G(x)$, par exemple les étoiles $K_{1,n-1}$ et le cycle élémentaire C_4.

Corollaire 1

Soit G un graphe ψ-parfait connexe, il vérifie :

$$\underset{X}{\text{Max}}\ d_G(x) + \underset{X}{\text{Min}}\ d_G(x) \geq n$$

Ceci résulte de l'inégalité classique: $K(G) \leq \underset{X}{\text{Min}}\ d_G(x)$

Corollaire 2

Soit G un graphe ψ-parfait connexe, son complémentaire $\overline{G}$ n'est pas ψ-parfait connexe.

En effet, si $\overline{G}$ était ψ-parfait connexe,il vérifierait les conclusions du corollaire 1, soit :

$(n - 1) - \underset{X}{\text{Max}}\, d_G(x) + (n-1) - \underset{X}{\text{Min}}\, d_G(x) \geq n$, c'est-à-dire :

$\underset{X}{\text{Min}}\, d_G(x) + \underset{X}{\text{Max}}\, d_G(x) \leq n - 2$,ce qui contredit les conclusions du corollaire 1 pour le graphe G.

Corollaire 3

SoitG un graphe ψ-parfait,connexe,régulier de degrés $d \geq 2$; alors G est hamiltonien.

En ce cas G vérifie: $d \geq \frac{n}{2}$, et donc le théorème de Dirac [17] permet de conclure.

Proposition 6

Soit G un graphe ψ-parfait qui n'est pas une clique.

Soit A un ensemble d'articulation de cardinal K(G), alors $G = J(G_A, G_{X-A})$.

Preuve :

Supposons qu'il existe un couple (x,y) de sommets de X tels que $x \in A$, $y \in X - A$ et $[x,y] \notin E$; Soit G_Y la composante connexe de G_{X-A} contenant y. Le sous-graphe $G_{Y \cup \{x\}}$ est connexe : dans le cas contraire $A - \{x\}$ serait un ensemble d'articulation de G, de cardinal $K(G) - 1$. Soit alors $\mu\,[y,x]$ une chaîne de $G_{Y \cup \{x\}}$,de longueur minimale parmi les chaînes reliant y à x. La longueur de μ est 2 puisque $G_{Y \cup \{x\}}$ est ψ-parfait connexe, donc de diamètre 2. Soit s le sommet intermédiaire de μ : $\mu\,[y,x] = [y,s,x]$

Soit G_Z une autre composante connexe de G_{X-A},et z un sommet de z adjacent à x. La chaîne [y, s, x, z] est un sous-graphe de G, de diamètre 3, d'où la contradiction cherchée.

Ainsi l'arête $[x,y]$ appartient à E pour tout couple $x \in A$ et $y \in X-A$. Le graphe G est donc le joint selon $K_{1,p}$ des sous-graphes $G_A, G_{X_1}, G_{X_2} \ldots G_{X_p}$, où les G_{X_i} sont les composantes connexes de G_{X-A}.

Théorème 2

Soit G un graphe simple, alors : G ψ-parfait $\Rightarrow$ G γ-parfait.

Preuve :

Le théorème est vrai trivialement pour n = 3,4. Supposons-le vrai jusqu'à $|X| = n - 1$. Soit G un graphe ψ-parfait ayant n sommets. Si G n'est pas connexe, il est formé de deux cliques disjointes (aux points isolés près), et il est donc γ-parfait.

Si G est connexe, $G_{X-\{x\}}$ est ψ-parfait pour tout sommet x de X, donc γ-parfait d'après l'hypothèse de récurence. Si G n'était pas γ-parfait, il serait γ-imparfait sommet critique au sens de Sachs [54]. Le théorème de Sachs assure alors que par tout sommet x de G il passe un cycle élémentaire C_p dont toutes les cordes partent de x, avec $p \geq 5$.

Par suppression d'un sommet x quelconque, on crée donc une chaîne élémentaire de longueur $l \geq 3$, ce qui contredit le fait que G est ψ-parfait.

§ 3 - Indice achromatique et graphes ζ - parfaits.

Un graphe simple G = (X, E) étant donné, on peut définir de manière analogue à celle employée dans le paragraphe précédent, des colorations complètes et régulières des arêtes de G : une coloration des arêtes est une partition de E en p couleurs $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i$; elle est régulière si chaque E_i est un couplage : C (e) = C (e') $\Rightarrow$ les arêtes e et e' n'ont pas d'extrémité commune. Elle est complète si pour toute paire de couleurs $\{i,j\}$ il existe une arête e et une arête e' ayant une extrémité commune, et telle que : C (e) = i, C (e') = j.

...

L'indice chromatique $q(G)$ usuel est le nombre minimum de couleurs requises pour pouvoir réaliser une coloration complète et régulière de E ; on définit l'indice achromatique $\zeta(G)$ comme le nombre maximum de couleurs permettant de réaliser une telle coloration. Cet indice a été introduit dans [9] on en retrouvera une étude détaillée dans [10] et notamment sa détermination pour certaines classes de graphes.

En général, on a $q(G) \leq \zeta(G)$; on appelle graphes ζ-parfaits ceux qui sont P-parfaits pour la propriété P : $q(G) = \zeta(G)$, c'est l'étude de ces graphes que nous entreprenons . Auparavant nous donnons une propriété de l'indice ζ - introduit.

Proposition 7

Soit G un graphe simple, $\zeta(G)$ et $\zeta(\overline{G})$ satisfont :

$$\zeta(G) + \zeta(\overline{G}) \leq \frac{2}{3} n(n-1) - 2\left(\sqrt{m} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} - m\right) + n + \operatorname{Max}_X d(x) - \operatorname{Min}_X d(x) + 3$$

Preuve :

D'après un théorème dû à Gupta [24] on sait que $\psi(G)+\psi(\overline{G}) \leq \left[\frac{4n}{3}\right]^*$. Pour L (G) cette relation donne successivement :

$$\psi(L(G)) + \psi(\overline{L(G)}) \leq \left[\frac{4m}{3}\right]^*, \text{ où } m = |E|.$$

D'après le théorème de Nordhaus-Gadhum : $2\sqrt{n} \leq \gamma(G)+\gamma(\overline{G}) \leq n+1$, donc pour L (G) :

$$\gamma(\overline{L(G)}) \geq 2\sqrt{m} - \gamma(L(G)) = 2\sqrt{m} - q(G) \geq 2\sqrt{m} - 1 - \operatorname{Max}_X d(x)$$

Cette dernière inégalité est bien sûr obtenue par le théorème de Vizing [4].

Donc : $\psi(\overline{L(G)}) \geq 2\sqrt{m} - \operatorname{Max}_X d(x) - 1$

$$\zeta(G) \leq \left[\frac{4}{3} m\right]^* - 2\sqrt{m} + \operatorname{Max}_X d_G(x) + 1$$

$$\zeta(\overline{G}) \leq \left[\frac{4}{3}\left(\frac{n(n-1)}{2} - m\right)\right]^* - 2\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} - m + n - \operatorname{Min}_X d_G(x),$$

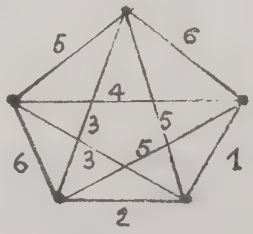
D'où résulte la majoration de l'énoncé.

Les sommets et arêtes isolés n'intervenant pas dans les propriétés de coloration étudiées,nous supposerons toujours que les graphes envisagés dans la suite en sont dépourvus.

Pour tout graphe simple G: $\zeta(G) = \psi(L(G))$, cependant un sous-graphe H de L (G) n'est pas en général le line-graph d'un sous-graphe de G. On ne peut donc conclure rapidement que l'étude des graphes ζ-parfaits se ramène à celle des graphes ayant un line-graph ψ-parfait.

Proposition 8

Soit G un graphe simple ζ-parfait,alors $\omega(G) \leq 4$. En effet, $q(K_5)=5$ et $\zeta(K_5) = 6$,comme le montre la coloration suivante:



Par contre pour K_4 et K_3 on a l'égalité des deux indices.

Proposition 9

Soit G un graphe simple ζ -parfait,alors on a l'une des trois éventualités :

a) G est connexe et $\delta(G) \leq 3$.

b) G a deux composantes connexes et de plus :

- ou bien G est union de deux cliques K_3 disjointes.
- ou bien une composante est K_3 , l'autre n'est pas une clique.
- ou bien les deux composantes ont pour diamètre 2.

c) G a trois composantes connexes, deux ont un diamètre égal à 2 et la troisième est la clique K_3 .

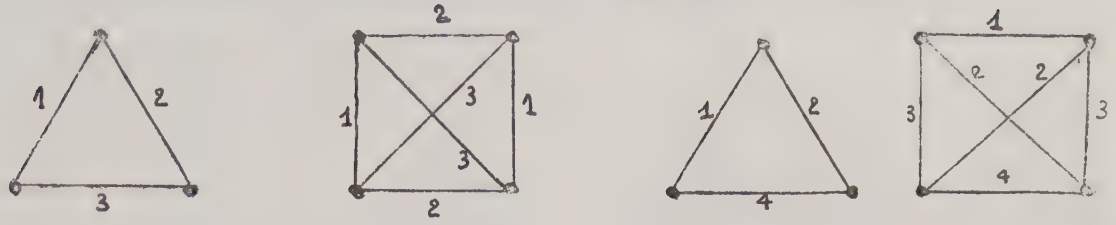
Preuve :

* Si G est connexe, un diamètre $D = [x_0, x_1, \ldots, x_\delta]$ est un sous-graphe de G ; pour $\delta > 3$,on a $q(D) = 2$ et $\zeta(D) \geq 3$. Ainsi $\delta(D) \leq 3$.

* Si G a deux composantes connexes qui sont des cliques, ce sont des cliques K_3 ou K_4 d'après la proposition précédente ; si l'une de ces

...

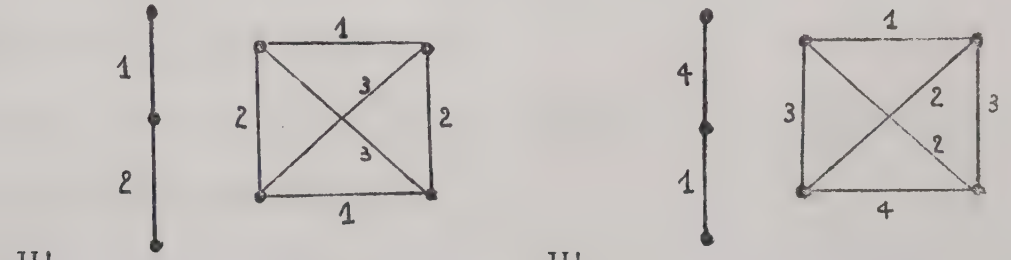
cliques était K_4 , G contiendrait le sous-graphe H suivant :



H

qui vérifie q (H) = 3 et ζ (H) = 4,comme le montre les colorations de la figure. Ainsi les deux composantes sont des cliques K_3.

* Si une seule des deux composantes est une clique, c'est une clique K_3, sinon G contiendrait le sous-graphe H' suivant:



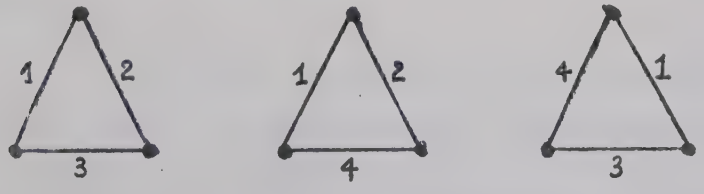
H' H'

qui vérifie q (H') = 3 < ζ(H') = 4, d'après la figure ci-contre.

* Si aucune des deux composantes n'est une clique, les deux composantes ont pour diamètre 2,sans quoi G contiendrait le graphe J suivant, qui vérifie également q < ζ

J

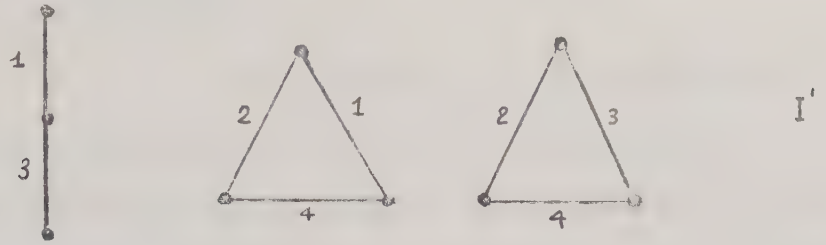
* Si G a trois composantes distinctes, toutes ne peuvent être des cliques, sans quoi G contiendrait un sous-graphe I formé de trois cliques K_3 disjointes,or q (I) = 3 et ζ(I) = 4



ζ (I) = 4

...

Si deux composantes seulement étaient des cliques, G contiendrait le sous-graphe I' vérifiant q (I') = 3 et ζ(I') = 4



I'

Si aucune composante n'était une clique, G contiendrait

I"

ce qui est impossible pour la même raison.

Enfin, G ne pouvant contenir le sous-graphe H', il est clair que la composante qui est une clique est K_3.

De par le raisonnement précédent, G ne peut avoir plus de trois composantes connexes: trois quelconques devraient contenir une clique K_3 d'une part, et une seule composante K_3 devrait exister d'autre part.

Proposition 10

Un arbre T est ζ-parfait si et seulement si son diamètre δ (T) vérifie δ (T) $\leq$ 3 .

Preuve :

* Si δ (T) = 2; T est une étoile $K_{1,n-1}$, tous ses sous-graphes sont des étoiles $K_{1,n'-1}$ ou des stables ; il est donc bien évident que T est ζ-parfait.

* Si δ(T) = 3; ou bien T est une chaîne élémentaire de longueur 3 , et donc T est ζ-parfait, ou bien il existe dans T des sommets de degrés d $\geq$3 :

1) S'il y a un seul sommet x' de degré supérieur ou égal à 3,

alors $d(x') = \underset{X}{\text{Max}}\, d_T(x) = q(T) = \zeta(T)$, et tout sous-graphe T' de T vérifie $\zeta(T') = q(T')$ trivialement.

2) S'il y a deux sommets x_2 et x_3 de degré supérieur ou égal à 3, soit $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ un diamètre de T; supposons $d_T(x_2) \geq d_T(x_3)$. Toute coloration complète des arêtes de T comporte $d_T(x_2)$ couleurs différentes autour de x_2 ; si l'une d'elles C n'est pas représentée autour de x_3, une nouvelle couleur C' ne peut apparaître en x_3 puisqu'alors C et C' ne seraient pas adjacentes. Ainsi $q(T) = \zeta(T) = d_T(x_2)$. Il est immédiat de voir qu'il en est de même pour tous les sous-graphes de T.

Inversement, si un arbre T est ζ-parfait, son diamètre est inférieur ou égal à 3, d'après la proposition 8.

Proposition 11

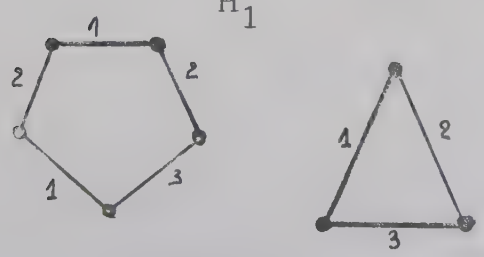
Soit G = (X, E) un graphe ζ-parfait différent du cycle élémentaire C_5 sans cordes, alors ni G ni $\overline{G}$ ne contiennent un cycle élémentaire C_p sans cordes comme sous-graphe, pour $p \geq 5$.

Preuve :

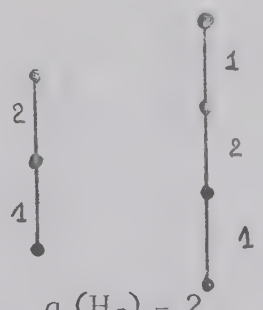
Montrons tout d'abord que G ne peut contenir comme sous-graphe strict un cycle élémentaire C_5 sans cordes : supposons que C soit un tel cycle de G,

- Si G n'est pas connexe, soit B une composante connexe ne contenant pas C ; que B soit une clique ou ait un diamètre supérieur ou égal à deux, G contient un des sous-graphes H_1, H_2 suivants, qui vérifient $\zeta > q$:

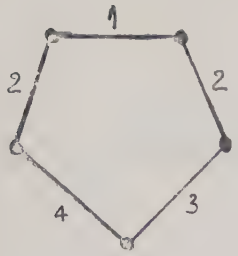
H_1

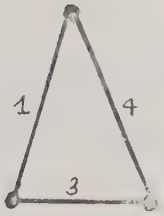


$q(H_1) = 3$

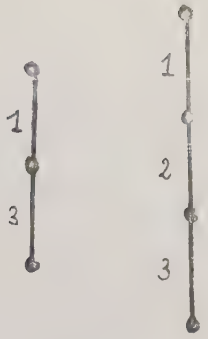


$q(H_2) = 2$





$\zeta(H_1) = 4$



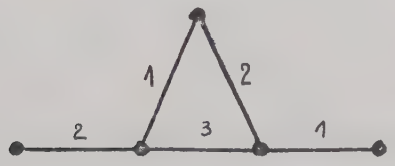
$\zeta(H_2) = 3$

- Si G est connexe et non réduit au cycle C ; soit $C = [a,b,c,d,e]$ et soit x un sommet de G n'appartenant pas à C et voisin d'au moins un sommet du cycle C, d par exemple.

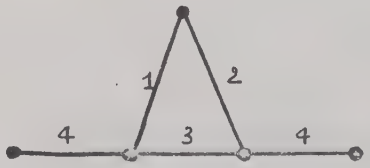
Soit $G' = G_{\{a,b,c,d,e,x\}}$, et posons $d_{G'}(x) = d'(x)$

* ou bien $d'(x) = 1$,et alors $G_{\{b,a,e,d,x\}}$ est une chaîne de longueur 4.

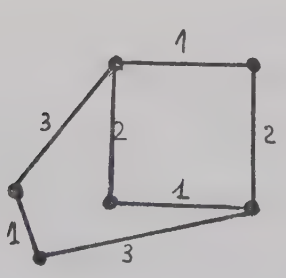
*ou bien $d'(x) = 2$,et alors G' contient un des sous-graphes F, F' suivants,qui vérifient $q < \zeta$.



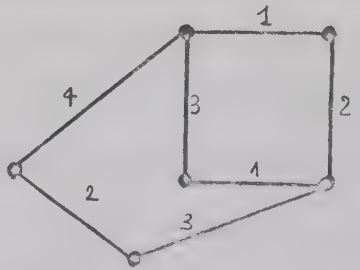
$q(F) = 3$



$\zeta(F) = 4$

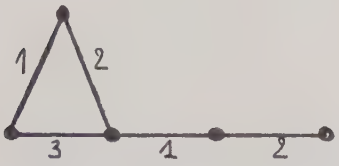


$q(F') = 3$

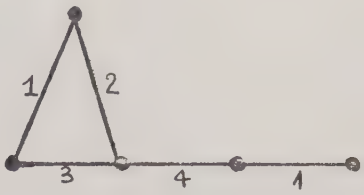


$\zeta(F') = 4$

* ou bien d' (x) = 3; par suppression d'un sommet on obtient le graphe F précédent,ou bien le graphe J suivant:

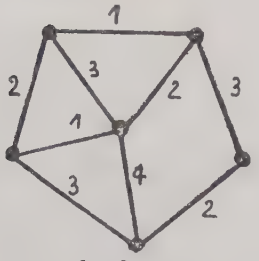


q (J) = 3

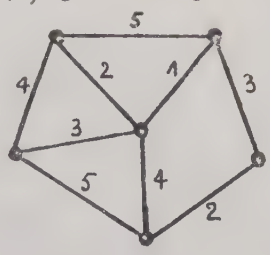


ζ (J) = 4

*ou bien d' (x) = 4 et q (G') = 4 , ζ (G') = 5 :

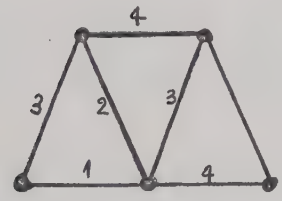


q (G') = 4

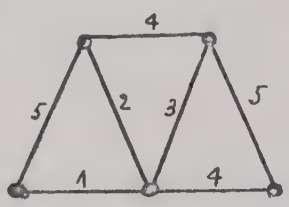


ζ (G') = 5

* ou bien d' (x) = 5,et G' contient le sous-graphe K :



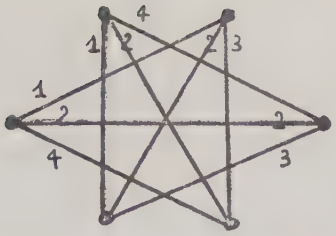
q (K) = 4



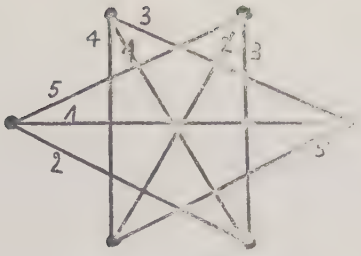
ζ (4) = 5

Dans tous les cas G ne peut donc contenir strictement un cycle C_5 sans cordes, ni $\overline{G}$, puisque C_5 est isomorphe à son complémentaire.

Si G admet un cycle C_6 sans cordes, il contient comme sous-graphe une chaîne élémentaire de longueur 4 et n'est donc pas ζ-parfait; s'il admet le complémentaire $\overline{C}_6$ d'un tel cycle, il n'est pas ζ -parfait comme en témoignent les deux colorations complètes suivantes de $\overline{C}_6$:

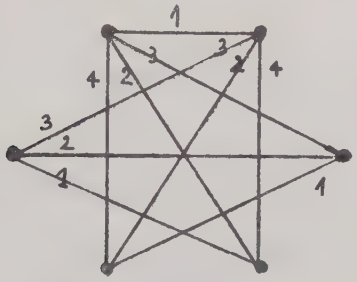


$q(\overline{C}_6) = 4$

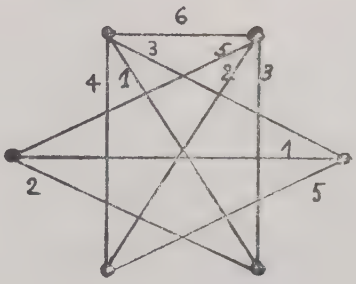


$\zeta(\overline{C}_6) \geq 6$

Si G admet un cycle C_p élémentaire sans cordes pour $p \geq 7$, ou son complément, il contient une chaîne P_4 comme sous-graphe ou bien le graphe H suivant :



$q(H) = 4$



$\zeta(H) = 6$

Ainsi, si G est ζ-parfait différent de C_5 il ne contient pas de cycle élémentaire C_p sans cordes, ni $\overline{C}_p$, pour $p \geq 5$.

Théorème 3

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple ζ-parfait sans sommets ni arêtes isolés; alors si G est différent de C_5 , il est α-parfait.

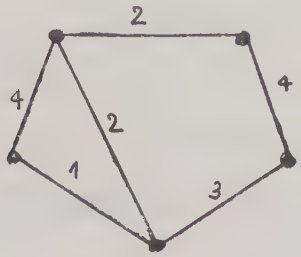
Preuve :

Le résultat est trivial pour $n = 3, 4$; supposons-le faux en général, et soit G un graphe répondant aux conditions de l'énoncé et non α-parfait, tel que $|X| = n$ soit minimum.

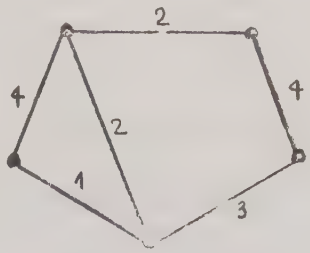
Tout sous-graphe propre $G_{X'}$ de G vérifie $\zeta(G_{X'}) = q(G_{X'})$ et est ζ-parfait; d'après la minimalité de n, on a donc $G_{X'}$ α-parfait. G est donc α-imparfait sommet critique au sens de Sachs [54], et ainsi tout sommet x appartient à un cycle élémentaire de G dont toutes les cordes partent de x, et de longueur supérieure ou égale à 5. Si un des cycles considérés avait

pour longueur $p \geq 6$, la suppression d'un sommet x laisserait subsister une chaîne élémentaire de longueur $p - 2 \geq 4$, ce qui est impossible. Ainsi chaque cycle a pour longueur exactement 5.

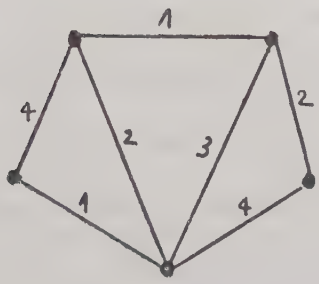
Seuls les deux cas suivants sont donc possibles:



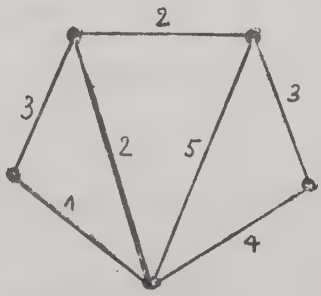
$q(H') = 3$



$\zeta(H') = 4$



$q(H'') = 4$



$\zeta(H'') = 5$

Les sous-graphes H' et H" vérifiant $q < \zeta$, on a la contradiction recherchée.

Remarque

Pour le problème des graphes ζ – parfaits envisagés dans ce dernier paragraphe, il pourrait sembler plus naturel d'étudier les graphes simples G, tels que tout graphe partiel G' de G vérifie $\zeta(G') = q(G')$. (*). Ce second problème se résoud complètement comme suit :

Considérons donc dans toute la suite un graphe G vérifiant (*). Notons que si H est un sous-graphe partiel de G, l'enlèvement de toutes les arêtes de G n'appartenant pas à H laisse subsister H et un ensemble de sommets isolés; on a donc $\zeta(H) = q(H)$; cette égalité doit donc être vérifiée pour tous les sous-graphes partiels de G. Ainsi si G vérifie (*) il est ζ-parfait au sens du § 3.

Propriété 1 :

Les seuls cycles sans cordes de G connexe possédant (*) sont de longueurs 3 ou 4. Cela découle immédiatement de la proposition 10. Nous pouvons donc classer les graphes considérés en trois classes :

a) G sans cycles, donc G est un arbre de diamètre $\delta \leq 3$.

Inversement tous les arbres de diamètre 2 ou 3 vérifient (*) :

- un arbre de diamètre 2 est une étoile $K_{1,n-1}$ et tout sous-graphe partiel est une étoile ou un stable, et vérifie donc $q = \zeta$.

- un arbre de diamètre 3 a une chaîne élémentaire $[a,b,c,d]$ de longueur 3. Tout sous-graphe partiel est une étoile, ou l'union de deux étoiles disjointes, ou bien un arbre de diamètre 3 ; ceci aux points et arêtes isolés près.

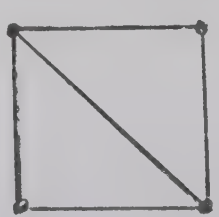
Dans chacun de ces trois cas on vérifie que $q = \zeta$ sans difficulté.

b) Le plus petit cycle de G a pour longueur 3. Si G n'est pas réduit à C_3, soit x un sommet adjacent à un point de C_3.

Soit $G' = G_{\{a,b,c,x\}}$ où $[a,b,c] = C_3$, posons $d_{G'}(x) = d'(x)$

- Si $d'(x) = 1$, ou bien G a pour sommets $\{a,b,c,x\}$ ou bien il existe $y \notin \{a,b,c,x\}$ adjacent à l'un de ces points. Le graphe G est donc formé d'une étoile à laquelle on ajoute une arête supplémentaire. Dans les autres cas G contiendrait comme sous-graphe partiel un des deux graphes F et J de la proposition 10, ce qui est impossible.

- Si $d'(x) = 2$; par le même argument que précédemment on montre que G est le graphe :



- Si $d'(x) = 3$, $\{a,b,c,x\}$ forment la clique K_4 et G est réduit à cette clique, sans quoi F serait sous-graphe partiel de G.

c) Le plus petit cycle de G est C_4 ; soit {a,b,c,d} un cycle C_4 de G; si G n'est pas réduit à ce cycle, soit x un sommet adjacent à un sommet de C_4 ; K_3 n'étant pas sous-graphe de G, on a donc deux possibilités :

Par suppression d'une arête à chacun de ces deux graphes, on obtient une chaîne élémentaire P_4 ; G est donc réduit au cycle C_4 seul.

En résumé, si G est connexe et vérifie (*) c'est l'un des graphes suivants :

K_3, K_4, C_4 , , ou un arbre de diamètre 2 ou 3.

Si G n'est pas connexe, chacune de ses composantes est l'un des graphes ci-dessus. Si G admettait trois composantes (non réduites à des sommets ou arêtes isolés), il contiendrait le sous-graphe partiel H suivant :

H =

qui vérifie $q = 2$, $\zeta = 3$.

Ainsi G n'a que deux composantes connexes, G ne peut avoir pour sous-graphe H' et chaque composante a donc un diamètre 1 ou 2, les deux composantes sont donc ou bien K_3 ou bien une étoile.

H'

°°°

Le problème du paragraphe 3 peut être envisagé également pour des multigraphes et non pour des graphes simples , une étude dans ce cadre semble beaucoup plus difficile.

Chapitre 5. COLORATION DE L'HYPERGRAPHE DES FACES D'UNE TRIANGULATION D'UNE SURFACE DE CARACTERISTIQUE e.

1 - Surface et immersion d'un graphe simple.

1. Surface

On désignera par le terme surface une variété topologique orientable de dimension 2 et sans bord. Rappelons qu'une telle variété peut s'obtenir à partir de la sphère S par la construction suivante :

a) On supprime de S 2 p disques ouverts ($p \geq 0$) ayant des adhérences deux à deux disjointes.

b) On recolle les 2 p bords de p cylindres fermés et bornés aux 2 p frontières des disques en conservant l'orientabilité. On dit que l'on a ainsi ajouté p "anses" à la sphère. Le nombre p d'anses ajoutées est le genre de la surface S' obtenue. Par exemple la sphère est de genre 0, le tore est homéomorphe à la sphère à laquelle on a ajouté une anse · son genre est 1.

A partir du genre p on définit la caractéristique d'Euler : $e(S') = 2(1-p)$.

2. Immersion d'un graphe simple dans un espace topologique

Un espace topologique T étant donné, tout sous-espace de T homéomorphe au segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ est appelé arc de Jordan de T ; les extrémités de l'arc de Jordan sont les images de 0 et 1 par l'homéomorphisme considéré.

Une immersion d'un graphe simple $G = (X, E)$ dans l'espace topologique T est obtenue de la manière suivante :

a) On considère un ensemble de points de T en bijection avec les sommets de G, notons $\dot{x}$ l'image du sommet x de G dans T.

b) On associe bijectivement des arcs de Jordan de T aux arêtes de G ; notons $\dot{e}$ l'arc de Jordan associé à une arête e.

On réalise ces bijections avec deux conditions :

c) Si e_1 et e_2 sont deux arêtes de G, distinctes, l'intersection de $\dot{e}_1$ et $\dot{e}_2$ est vide ou bien est l'image $\dot{x}$ d'une extrémité x commune à e_1 et e_2 dans G.

d) Si e est une arête ayant pour extrémité x_1 et x_2 dans G_1, l'arc de Jordan $\dot{e}$ a pour extrémités $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$.

Un graphe G = (X, E) étant donné, une telle immersion existe toujours dans une surface de genre suffisamment grand, on le voit par l'argument heuristique suivant dû à Youngs [58 a]:

Considérons un ensemble X de points de la sphère S, en bijection avec X et traçons sur S des arcs de Jordan représentatifs des arêtes de G de telle manière que les conditions c) et d) soient respectées. On considère ensuite chaque arête [x,y] = e non représentée et l'on enlève deux disques ouverts contenus respectivement dans un voisinage de $\dot{x}$ et dans un voisinage de $\dot{y}$ sur S, ne rencontrant aucun des arcs de Jordan déjà considérés.

Ajoutons une "anse" bord à bord aux places des disques enlevés ; un nouvel arc de Jordan tracé en partie sur l'anse permet de représenter l'arête [x,y] = e de G.

Il est bien clair que si G est immergeable dans une surface de genre p ; il est immergeable dans une surface de genre $p' \geq p$. Il suffit pour cela d'ajouter p'-p anses à la sphère. Un graphe G étant donné, un des problèmes importants à considérer est le genre minimum d'une surface où G est immergeable. On notera p (G) cet entier.

3. Faces d'une immersion et théorème de Youngs, triangulations d'une surface.

Soit G = (X, E) un graphe simple dont on considère une immersion dans une surface S de genre $p \geq p(G)$. Soit $\dot{G}$ l'union, dans S, des arcs de Jordan associés aux arêtes de G. $\dot{G}$ est un sous-ensemble fermé de S. Les composantes connexes de S - $\dot{G}$ sont des ouverts de la surface S appelés faces de l'immersion $\dot{G}$.

On dit que l'immersion de G est 2-cellulaire si chacune de ses faces est homéomorphe à un disque ouvert.

Toute immersion d'un graphe simple n'est pas 2-cellulaire, par exemple un cycle élémentaire C immergé dans le Tore détermine une immersion $\dot{C}$ dont une face n'est pas 2-cellulaire ;

Deux résultats fondamentaux permettent d'assurer que l'on a une immersion 2-cellulaire d'une part, et relie la caractéristique d'Euler e (S) de la surface aux paramètres combinatoires du graphe à immerger d'autre part.

Théorème de Youngs [58 a]

Toute immersion d'un graphe simple G dans une surface de genre p (G) est 2-cellulaire.

Théorème 2

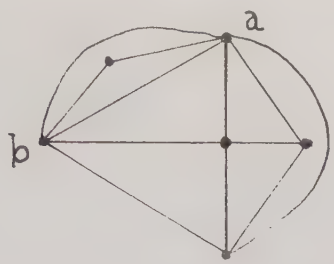
Soit G un graphe simple ayant n sommets et m arêtes, immergé 2-cellulairement dans une surface S de caractéristique d'Euler e (S) ; $\dot{G}$ ayant f faces, alors e (S) = n - m + f.

Dans le cas de la sphère (e (S) = 2) on retrouve la formule d'Euler bien connue dans la théorie des graphes planaires.

...

Si un graphe simple $G = (X, E)$ est immergé dans une surface S de telle sorte que chaque face de $\dot{G}$ soit un triangle, on dit que $\dot{G}$ réalise une triangulation de la surface S.

N.B. On ne considère pas de triangulations du type suivant :



dont le graphe associé G est un multigraphe (arête double entre a et b).

§ 2 - Hypergraphes : Définitions et notations.

Un hypergraphe $H = (X, \mathcal{E})$ est un couple formé d'un ensemble X non vide et d'une famille $\mathcal{E}$ de parties de X vérifiant :

1) $\emptyset \notin \mathcal{E}$

2) $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = X$

Les éléments de X sont appelés sommets de l'hypergraphe, dans la suite nous envisagerons toujours des ensembles X finis, et l'on notera $n = |X|$. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés arêtes de l'hypergraphe, on notera $|\mathcal{E}| = m$ et $\mathcal{E} = E_1, E_2, \ldots, E_m$.

Cette notion est due à C. Berge [4] auquel les définitions qui suivent et la terminologie sont empruntées. On trouvera un recueil de résultats récents sur les hypergraphes dans [4a].

Le rang de l'hypergraphe H est le cardinal maximum d'une arête de H : $r(H) = \max_{E \in \mathcal{E}} |E|$. Si toutes les arêtes de H ont le même cardinal r on dit que H est uniforme de rang r.

Un hypergraphe uniforme de rang r est appelé clique , si ses arêtes sont toutes les parties ayant r éléments dans X, c'est-à-dire $\mathcal{P}_r(X) = \mathcal{E}$.

Un hypergraphe partiel $H' = (X, \mathcal{E}')$ de $H = (X, \mathcal{E})$ est un hypergraphe ayant le même ensemble de sommets X que H, et un ensemble $\mathcal{E}'$ d'arêtes tel que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$.

Un sous-hypergraphe $H' = (X', \mathcal{E}')$ de $H = (X, \mathcal{E})$ est un hypergraphe ayant pour ensemble de sommets une partie $X' \subset X$ et pour ensemble d'arêtes les traces non vides des arêtes de H sur X' :

$$\mathcal{E}' = \{ X' \cap E \mid E \in \mathcal{E} \text{ et } X' \cap E \neq \emptyset \}$$

Notons qu'un hypergraphe partiel d'un hypergraphe r-uniforme est encore r-uniforme, ce qui n'est pas vrai pour un sous-hypergraphe.

Le nombre de stabilité $\alpha(H)$ de l'hypergraphe H est le cardinal maximum d'un sous-ensemble S de X, ne contenant aucune arête de H. Un tel ensemble est appelé sous-ensemble stable de H, ou plus simplement "stable de H".

Le nombre chromatique $\chi(H)$ est le plus petit nombre de couleurs pouvant être affectées aux sommets de H, de telle sorte qu'aucune arête ne soit unicolore ; c'est-à-dire : $\chi(H)$ est le cardinal minimum d'une partition de X en stables de H.

Si $\chi(H) = 2$, l'hypergraphe H est dit bichromatique.

§ 3. Nombre chromatique $\gamma(H)$ de l'hypergraphe des faces d'une triangulation d'une surface de caractéristique e(S).

1. Hypergraphe associé à une triangulation .

Soit S une surface de caractéristique e(S) et $\mathcal{C}$ une triangulation de celle-ci (provenant de l'immersion d'un graphe simple G).

Soit X l'ensemble des sommets de $\mathcal{C}$ et T l'ensemble de ses faces (triangulaires) $H_{\mathcal{C}} = (X, T)$ est un hypergraphe 3-uniforme, au sens du paragraphe 2. Dans la suite nous étudierons le nombre chromatique $\chi(H_{\mathcal{C}})$ de cet hypergraphe, qui dépend bien entendu de la caractéristique de la surface S considérée .

2. Nombres de Heawood [53 b]

Le nombre chromatique des graphes simples immergeables dans une surface S de caractéristique $e(S) \neq 2$ est majoré par le nombre de Heawood :

$$H\left(\frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{1 + 48\left(1 - \frac{e}{2}\right)}\right)\right)$$

Pour e = 2 la formule précédente donne H (2) = 4, ce qui est la conjecture des 4-couleurs [52 a]. On notera $\chi(S)$ le maximum des nombres chromatiques des graphes immergeables dans la surface S. Pour e = 2 on sait que $\chi(S) \leq 5$,[53 b] [52 a] . On posera donc H (2) = 5.

Théorème 1

Soit $\mathcal{C}$ une triangulation d'une surface de caractéristique e (S) et $H_{\mathcal{C}}$ l'hypergraphe associé, alors $\chi(H_{\mathcal{C}}) \leq H'(e) = \left[\frac{H(e)}{2}\right]^*$.

Preuve :

Considérons le graphe simple G dont l'immersion $\dot{G}$ dans G est la triangulation $\mathcal{C}$. D'après le théorème de Heawood le nombre chromatique de G vérifie $\gamma(G) \leq H(e)$; ainsi les sommets de G admettent une partition $X = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_\gamma$ en stables de cardinal $\gamma \leq H(e)$. Regroupons ces classes de couleurs deux par deux : $S'_1 = S_1 \cup S_2$, $S'_2 = S_3 \cup S_4$ etc ... Avec une dernière classe $S'_{[\gamma/2]^*}$ qui est $S'_\gamma = S_\gamma$ ou $S'_\gamma = S_\gamma \cup S_{\gamma - 1}$ selon la parité de γ . On obtient donc ainsi $S'_1, S'_2 \ldots S'_{\left[\frac{\gamma}{2}\right]^*}$, partition de X en $\left[\frac{\gamma}{1}\right]^*$ classes.

Chaque arête E de $H_{\mathcal{C}}$ qui est une face (triangulaire) de $\mathcal{C}$ intersecte au moins deux classes S'_i et S'_j différentes puisque ses trois sommets

appartiennent à trois classes S_i distinctes de la coloration de G en ν couleurs. On a ainsi obtenu une coloration des faces de $\mathcal{C}$ de telle sorte qu'aucune ne soit monocolore, donc $\chi(H_{\mathcal{C}}) \leq H'(e)$.

Nous avons donc une majoration pour $\chi(H_{\mathcal{C}})$; le problème se posant immédiatement est celui de savoir si cette borne est atteinte : nous étudierons les cas suivants :

- $e(S) = 2$ cas de la sphère (cf note en bas de page).
- $e(S) = 1$ cas de la bande de Moëbius, qui n'entre pas dans le cadre des surfaces définies au § 1, mais pour laquelle le résultat s'exprime très simplement.
- $e(S) = 0$ cas du Tore.

A. $e(S) = 2$ cas de la sphère (et donc du plan)

On a posé $H(2) = 5$, d'où $H'(2) = 3$; si la conjecture des 4-couleurs était vraie, on pourrait poser $H'(2) = 2$. Le théorème suivant montre que l'on peut effectivement bicolorier l'hypergraphe des faces d'une triangulation de la sphère :

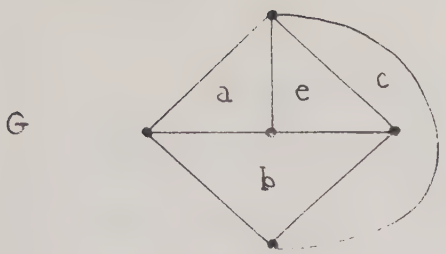
Théorème 2 :

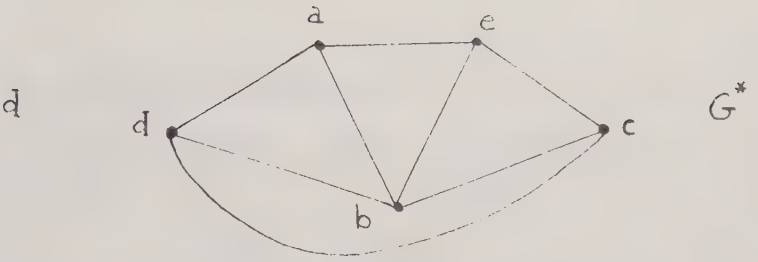
Soit $\mathcal{C}$ une triangulation de la sphère S et $H_{\mathcal{C}}$ l'hypergraphe 3-uniforme des faces de $\mathcal{C}$; alors $\chi(H_{\mathcal{C}}) = 2$.

Preuve :

Soit G le graphe simple dont l'immersion dans S définit la triangulation $\mathcal{C}$. Le dual G^* de G est le graphe obtenu en prenant un ensemble de sommets en bijection avec les faces de $\mathcal{C}$ et en joignant deux sommets si et seulement s'ils sont représentatifs de deux faces de $\mathcal{C}$ bordées par un arc de Jordan commun.

N.B. Nous avons appris que J.G. Penaud avait étudié ce cas et démontré le théorème suivant :" Tout hypergraphe planaire dont les arêtes contiennent au moins trois sommets, est faiblement bicoloriable" (à paraître).



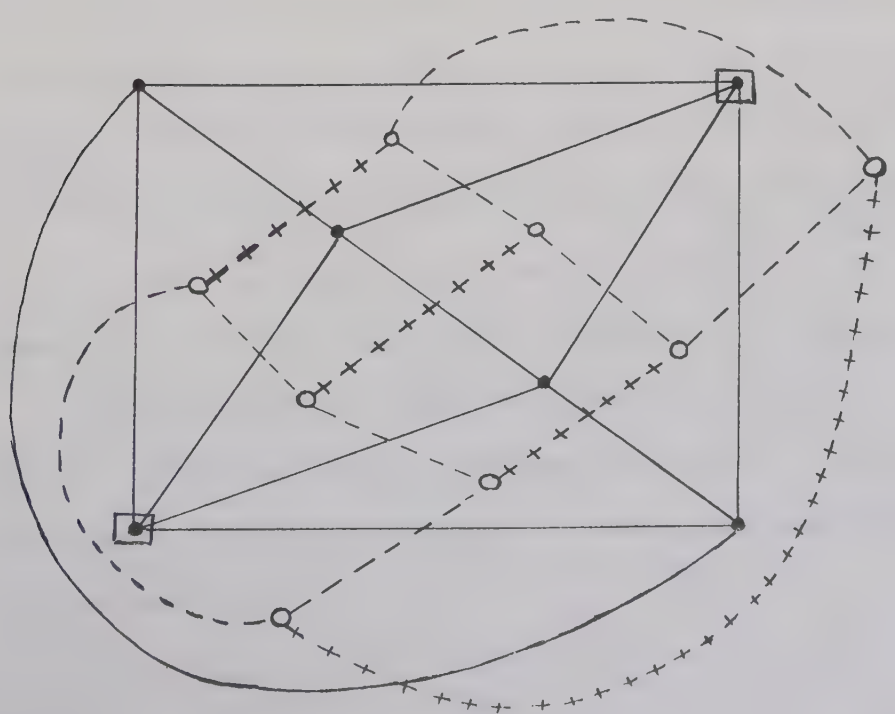


Le graphe G* est cubique : un sommet x de G*, représentatif d'un triangle T de $\mathcal{C}$ est adjacent aux trois sommets x_1, x_2, x_3 représentatifs des triangles T_1, T_2, T_3 de $\mathcal{C}$ qui ont une arête commune avec T. Le graphe G étant simple, triangulé, son dual G* est sans isthme.

Le résultat ancien de Petersen (1891) [52 b] : "Soit G un graphe simple régulier de degré 3 et d'arête-connexité $\lambda(G) \geq 2$, alors G admet un couplage parfait",

(Ce résultat peut s'étendre aux graphes réguliers de degré $h > 3$ à l'aide du théorème de Tutte-Berge [4])

implique $G^* = (X^*, E^*)$ admet donc un couplage parfait $F \subset E^*$. L'ensemble $E^* - F$ est donc une union disjointe de cycles élémentaires de G*. Le graphe G étant planaire, l'ensemble A d'arêtes de G, correspondant par dualité à $E^* - F$ est donc un cocycle [52 a] de G.



Soient X' et X" la partition de X déterminée par le cocycle A précédent. Chaque arête de l'hypergraphe $H_{\mathcal{C}}$ correspond dualement à un sommet de G*.

Pour tout x on a $d_{E'-F}(x) = 2$, donc il existe deux arêtes du cocycle A dans le triangle T, ainsi T contient un sommet de la classe X' et un sommet de la classe X".

La bipartition (X', X") de X réalise donc une bicoloration des sommets de l'hypergraphe $H_{\mathcal{C}}$. $\chi(H_{\mathcal{C}}) = 2$.

N.B. Le théorème de Petersen cité plus haut joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 2. Rappelons que les propriétés des couplages parfaits de graphes cubiques sont liés à la conjecture des 4-couleurs. La propriété suivante est équivalente à la conjecture des 4-couleurs :

Soit G un graphe planaire triangulé, son dual G* possède un couplage F tel que E* - F, complémentaire de ce couplage, est une union de cycles élémentaires de longueurs paires [52 a].

B. e(S) = 0 , cas du Tore.

On a H(0) = 7, donc H'(0) = 4 ; nous allons montrer que cette borne n'est pas atteinte et que trois couleurs sont en fait suffisantes pour colorier les sommets de $H_{\mathcal{C}}$ associé à une triangulation $\mathcal{C}$ du Tore (théorème 3). Avant d'énoncer et de démontrer ce théorème il est nécessaire d'introduire la notion de triangulation partielle et de démontrer les deux lemmes suivants :

Soit $\mathcal{C}$ une triangulation d'une surface S, X' un sous-ensemble de sommets de cette triangulation. L'ensemble $\mathcal{C}_{X'}$ des faces triangulaires de dont trois sommets appartiennent à X' est appelé triangulation partielle de S. L'hypergraphe $H_{\mathcal{C}_{X'}}$ est alors bien défini : ses arêtes sont les triplets de sommets des faces triangulaires envisagées précédemment et l'ensemble des sommets est X'.

Nous dirons que la triangulation partielle $\mathcal{C}_{X'}$ de S est χ-critique si pour tout sommet x' de X on a :

$$\chi(H_{\mathcal{C}_{X'-\{x\}}}) < \chi(H_{\mathcal{C}_{X'}})$$

et donc pour tout x de X' :

$$\chi(H_{\mathcal{C}_{X'-\{x\}}}) = \chi(H_{\mathcal{C}_{X'}}) - 1$$

Lemme 1

Soit $\mathcal{C}$ une triangulation d'une surface S de nombre chromatique χ, alors il existe une triangulation partielle $\mathcal{C}_{X'}$ de $\mathcal{C}$ qui est χ-critique.

Il est en effet immédiat de construire une triangulation partielle χ - critique de $\mathcal{C}$ par enlèvements successifs de sommets à X, qui ne font pas décroître le nombre chromatique $\chi(H_{\mathcal{C}})$; en un nombre fini d'étapes, il est bien clair que l'on obtient un sous-ensemble X' ayant la propriété cherchée.

Lemme 2

Soit $\mathcal{C}$ une triangulation d'une surface S, dont l'hypergraphe associé à un nombre chromatique $\chi(H_{\mathcal{C}})$, et $\mathcal{C}_{X'}$ une triangulation partielle χ - critique de $\mathcal{C}$ telle que $\gamma(H_{1_{X'}}) = X$ alors tous les sommets du graphe G' dont l'immersion dans S est $\mathcal{C}_{X'}$, ont un degré supérieur ou égal à $2(\chi - 1)$.

Preuve :

Considérons un sommet quelconque de X', on a donc :

$$\chi(H_{\mathcal{C}_{X'}}) = \chi(H_{\mathcal{C}}) - 1 = \chi - 1$$

Soit $C_1, C_2, \ldots, C_\chi$ une coloration de $H_{\mathcal{C}_{X'-\{x\}}}$ en $\chi - 1$ couleurs. Pour chaque couleur i il existe au moins une arête de $H_{\mathcal{C}_{X'}}$, $\{x', y, z\}$ dont les sommets y et z sont coloriés avec la couleur i : dans l'hypothèse

inverse on obtiendrait une coloration de $H_{\mathcal{T}_{X'}}$ en $\chi - 1$ couleurs, en coloriant le sommet x' avec la couleur i, à partir de la coloration $C_1, C_2, \ldots, C_{\chi-1}$.

Le degré du sommet x' dans le graphe G' est donc au moins égal à $2(\chi - 1)$.

Théorème 3

Soit $\mathcal{T}$ une triangulation du tore, alors l'hypergraphe $H_{\mathcal{T}}$ 3-uniforme associé à $\mathcal{T}$, vérifie $\chi(H_{\mathcal{T}}) \leq 3$. En outre, la borne 3 est atteinte pour l'hypergraphe 3-uniforme associé à la triangulation induite par l'immersion 2-cellulaire du graphe complet K_7 ayant 7 sommets.

Preuve :

De par la proposition 1 de ce paragraphe on sait que toute triangulation $\mathcal{T}$ du tore a un hypergraphe $H_{\mathcal{T}}$ associé, de nombre chromatique $\chi(H_{\mathcal{T}}) \leq 4$. Supposons qu'il existe une triangulation telle que : $\chi(H_{\mathcal{T}}) = 4$. Le lemme 1 permet d'assurer l'existence d'une triangulation X' partielle, χ-critique, de $\mathcal{T}$, telle que : $\chi(H_{\mathcal{T}_{X'}}) = 4$. Soit G le graphe dont l'immersion dans le tore est $\mathcal{T}_{X'}$; d'après le lemme 2 on a :

$$\min_{x \in X'} d_G(x) \geq 6$$

Le graphe G est immergé 2-cellulairement dans le tore : dans le cas contraire, une construction due à Youngs [58 a] ("capping operation") permettrait d'obtenir une immersion 2-cellulaire de G dans une surface orientable de genre inférieur à celui du tore ; cette surface ne peut donc être que la sphère. Or on sait que tout graphe planaire a un sommet de degré inférieur ou égal à 5 [52 a], d'où l'impossibilité cherchée.

G n'ayant ni boucles ni arêtes multiples, les faces de $\mathcal{T}_{X'}$ dans le tore sont toutes de longueur supérieure ou égale à 3.

Tous les degrés des sommets de G sont égaux à G et toutes les faces ont pour longueur 3 : si nous posons en effet :

$$m(G) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X'} d_G(x) = \frac{1}{2}(6n + \beta)$$

et

$$m(G) = 3f + \alpha$$

où α et β sont des entiers positifs ou nuls et où f désigne le nombre de faces de $\mathcal{C}_{X'}$, il vient :

$$n = \frac{2m - \beta}{6} \quad \text{et} \quad f = \frac{2m - \alpha}{3}$$

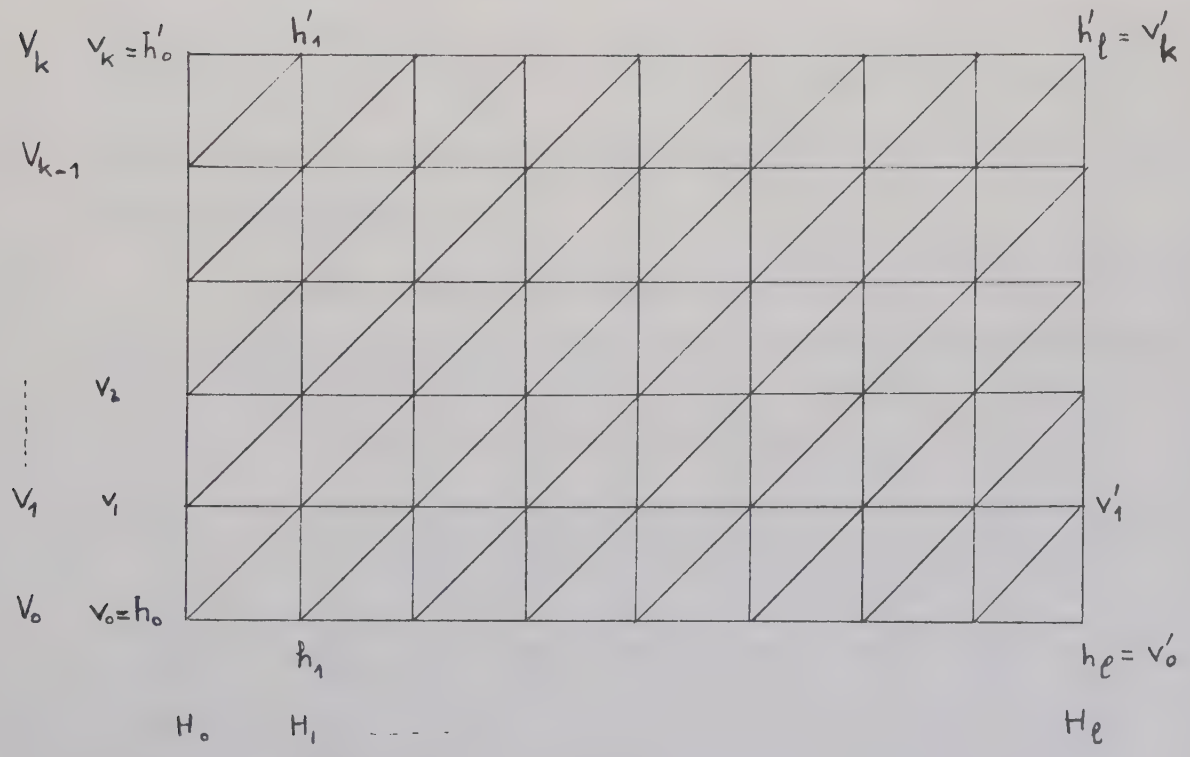
que nous reportons dans la formule d'Euler :

$$e(S) = n - m + f \text{ pour obtenir } 2\alpha + \beta = 0, \text{ donc } \alpha = \beta = 0$$

$\mathcal{C}_{X'}$ réalise donc une triangulation du tore, χ-critique, telle que le nombre chromatique $\chi(H\mathcal{C}_{X'})$ soit 4.

A. Altshuler [1 a] a déterminé la structure générale des triangulations du tore dont les sommets sont tous de degré 6 :

Construisons une subdivision en carrés d'un rectangle à l'aide de deux familles de segments parallèles aux côtés du rectangle $V_o = v_o v'_o$ $V_1 = v_1 v'_1, \ldots, V_k = v_k v'_k$ et $H_o = h_o h'_o$, $H_1 = h_1 h'_1, \ldots, H_\ell = h_\ell h'_\ell$; avec $h_o = v_o$, $h_1 = v'_o$, $h'_1 = v_k$ et $v'_k = h'_o$.



Traçons maintenant toutes les diagonales parallèles à la direction $v_{k-1}\, h'_1$. Par identification de v_o et v'_o , v'_1 et v_1 ... v'_k et v_k , on obtient un cylindre ayant pour bord deux cercles μ et μ' comportant respectivement les points $(h_i)_{i = 0,\ldots,l}$ et $(h'_i)_{i = 0,\ldots,l}$.

Identifions maintenant les deux cercles μ et μ' avec pour seul impératif que les points $(h_i)_{i=0,\ldots l}$ et $(h'_i)_{i= 0,\ldots l}$ soient globalement identifiés (une "torsion" du cylindre est autorisée avant l'identification).

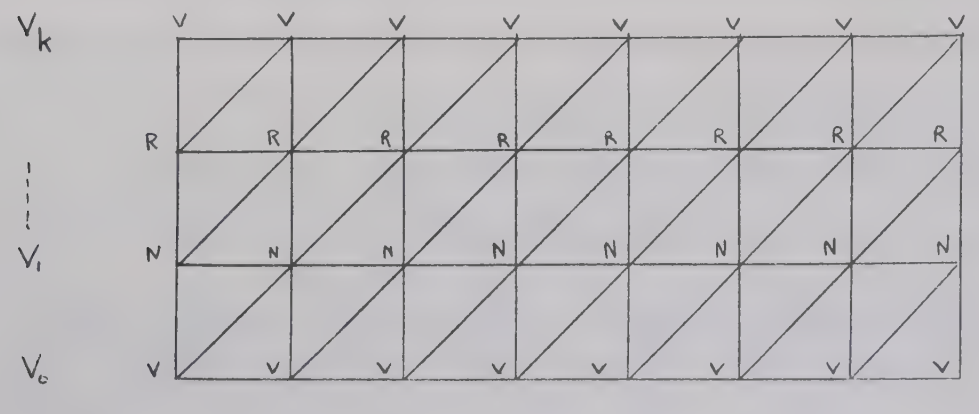
Si $k \geq 2$,

considérons la coloration en trois classes de couleurs V, R, N des sommets de la triangulation du tore obtenue :

- la classe V est formée de tous les sommets h_i, h'_i,
- la classe R est formée des points des segments $v_i\, v'_i$, pour i pair différent de 0 et k,
- la classe N est formée de tous les autres points de subdivision.

Il est immédiat de vérifier que cette coloration est compatible avec les deux identifications : les sommets de μ et μ' sont tous dans la classe V d'une part, et les extrémités d'un même segment $v_i\, v'_i$ sont toutes les deux dans la classe R ou toutes les deux dans la classe N suivant la parité de i, si i est différent de 0 et k.

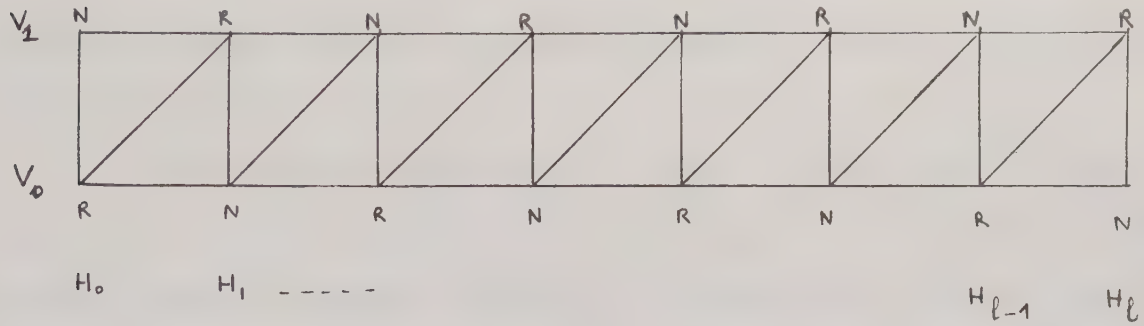
k étant supérieur ou égal à 2, tout triangle de la subdivision a deux sommets de couleurs distinctes appartenant à un même segment $h_i\, h'_i$.



H_0 H_1 ----- H_ℓ

Si k = 1 et que l est impair

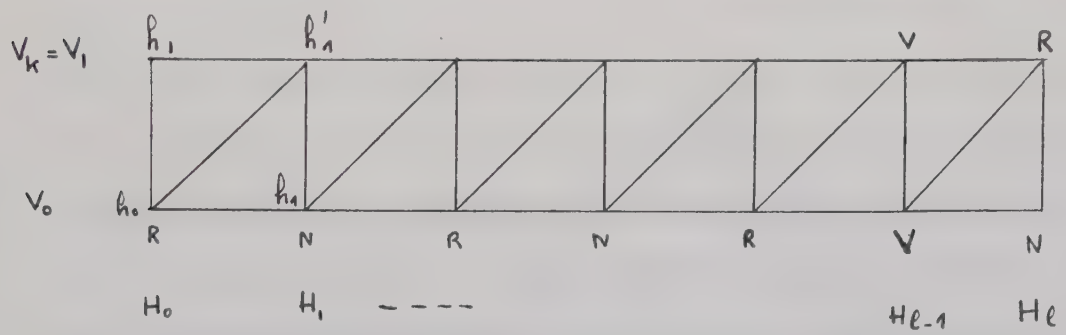
Considérons la coloration suivante : On colorie alternativement R et N les points de V_o et l'on reporte ce coloriage par identification sur $V_k = V_1$. On obtient ainsi une bicoloration des triangles de la subdivision :



Dans cette figure on suppose que h_o et h'_1 sont les points x correspondant dans l'identification.

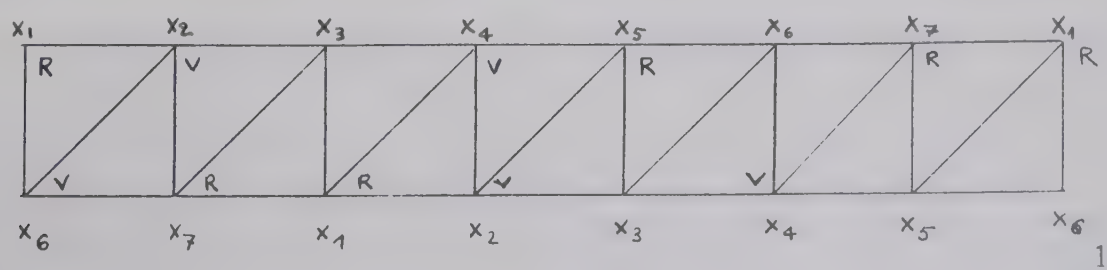
Si k = 1 et que l est pair

On colorie alternativement R et N les points de V_o sauf ceux de H_{l-1}, que l'on colorie en V et ceux de H_1 que l'on colorie de manière compatible avec l'identification .



Dans cette figure on suppose que h_o h'_1 se correspondent dans l'identification. On obtient ainsi une coloration en trois couleurs de la subdivision de telle sorte qu'aucun triangle ne soit monocolore : $\chi(H_{\varphi}) \leq 3$.

La borne 3 est atteinte pour certaines triangulations du tore : par exemple celle qui est associée à l'immersion 2-cellulaire de K_7 suivante :



En effet, si nous supposons $H_{\mathcal{C}}$ colorable en deux couleurs V, R ; considérons une arête $\{x_4, x_2, x_1\}$ par exemple, colorée avec x_4, x_2 de couleur V et x_1 de couleur R.

Examinons les arêtes $\{x_4, x_2, x_5\}$, $\{x_1, x_5, x_6\}$ et $\{x_2, x_6, x_7\}$: il est bien clair que x_5 et x_7 sont coloriés avec R et x_6 avec V. La contradiction cherchée est alors obtenue en remarquant que l'arête $\{x_5, x_7, x_1\}$ serait alors monocolore de couleur R , ce qui établit la deuxième partie du théorème 3.

C. e (S) = 1, cas de la bande de Moëbius

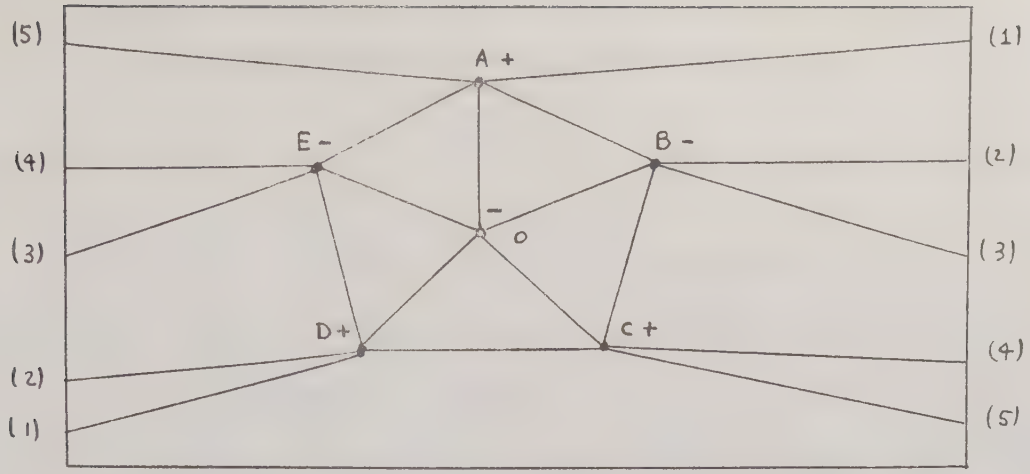
La bande de Moëbius n'entre pas dans le cadre des variétés envisagées au premier paragraphe : elle est non orientable et possède un bord. Ce bord étant unique on peut obtenir une surface ayant un voisinage homéomorphe à un disque ouvert pour tout point par recollement d'un disque le long du bord. Bien sûr la surface obtenue est encore non orientable. On peut définir les triangulations de la bande de Moëbius de manière analogue à ce qui a été fait précédemment et considérer les hypergraphes $H_{\mathcal{C}}$ associés. On a $H(1) = 6$, donc $H'(1) = 3$. Trois couleurs sont effectivement nécessaires pour colorier l'hypergraphe $H_{\mathcal{C}}$ de certaines triangulations.

Théorème 4

Soit $\mathcal{C}$ la triangulation induite par l'immersion (2-cellulaire) de K_6 dans la bande Moëbius, on a : $\chi(H_{\mathcal{C}}) = 3$.

Preuve :

Considérons l'immersion $\mathcal{C}$ de K_6 décrite par la figure suivante :



Supposons que deux couleurs (+ et -) suffisent pour colorer les arêtes de H . Sur le cycle impair (de longueur 5) A, B, C, D, E, on aura deux sommets voisins (C et D par exemple) de la même couleur (+). L'arête {0, C, D} de H $\mathcal{C}$ n'est pas monocolore donc 0 est colorié - . Pour la même raison, en considérant {A, C, D} , A est de couleur + et en considérant {A, E, C} et {A, B, D} , B et E sont de couleur - .

Les arêtes {A, E, C } et {A, B, D} sont alors monocolores, d'où la contradiction cherchée.

Pour les surfaces de caractéristiques d'Euler e (S) différentes de 0, 1, 2 , on ne connait pas de théorème analogue à celui de A. Altschuler [1 a], nous permettant de construire toutes les triangulations du tore, celui-ci nous a fourni un argument décisif dans la démonstration du théorème 3, de même que le théorème de Petersen [52 b] pour le cas des graphes planaires. Le problème de la détermination du nombre chromatique $\gamma(H_{\mathcal{C}})$ des hypergraphes associés aux triangulations des surfaces de caractéristique d'Euler négatives reste donc ouvert.

ANNEXE 1

Définitions et notations usuelles

Généralités

$d^+(x)$, $d^-(x)$, $d(x)$, $d^{\pm}(x)$

Un 1-graphe $G = (X, E)$ étant donné, $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$) désigne le nombre d'arcs (x,y) différents de G (resp. (y,x)). $d(x)$ désigne la somme $d^+(x) + d^-(x)$, et $d^{\pm}(x)$ désigne le plus petit des deux demi-degrés : $d^{\pm}(x) = \text{Min}\{ d^+(x), d^-(x) \}$. Pour un graphe simple $d(x)$ désigne le nombre d'arêtes ayant x pour extrémité.

$\Gamma(x), \Gamma^-(x)$

On désigne habituellement par $\Gamma(x)$, (resp. $\Gamma^-(x)$), l'ensemble des sommets y qui sont extrémités terminales (respectivement initiale) d'un arc ayant x pour origine.
Ainsi $|\Gamma(x)| = d^+(x)$.

$V(x)$

On note $V(x)$ l'ensemble des voisins de x ($V(x) = \Gamma(x) \cup \Gamma^-(x)$ pour un 1-graphe).

$d(x,y)$

Pour un 1-graphe $d(x,y)$ désigne la longueur (nombre d'arcs) minimale d'un chemin élémentaire de G ayant x pour origine et y pour extrémité ; ce n'est pas une distance au sens topologique, car on n'a pas en général : $d(x,y) = d(y,x)$.
Pour un graphe simple $d(x,y)$ est la longueur d'une chaîne élémentaire minimale, ayant x et y pour extrémités. C'est une distance au sens topologique.

$\delta(G)$

Un 1-graphe, ou bien un graphe simple, G étant donné, $\delta(G)$, appelé diamètre de G, désigne le nombre $\underset{(x,y) \in X^2}{\text{Max}}\ d(x, y)$

...

$e(x)$ Pour un sommet x d'un 1-graphe, G on pose $e(x) = \underset{y \in X-\{x\}}{\text{Max.}}\ d(x,y)$, et on l'appelle écartement de x.

$\rho(G)$ Un centre x_o est un sommet d'écartement minimum ; cet écartement est appelé rayon de G et noté $\rho(G)$.

Stables, couplages, absorbant, cliques

$\alpha(G)$ Un ensemble S de sommets d'un graphe est dit stable s'il vérifie : $\forall x \in S,\ \forall y \in S,\ (x,y) \notin E$ et $(y,x) \notin E$; le cardinal d'un tel ensemble est noté $\alpha(G)$.

$\alpha'(G)$ Le cardinal minimum d'un stable maximal pour $\subseteq$ est noté $\alpha'(G)$; on a donc $\alpha'(G) \leq \alpha(G)$ pour tout graphe G.

$\beta(G)$ Un ensemble A de sommets d'un graphe $G = (X,E)$ est dit absorbant s'il vérifie : $\forall y \in X - A$, $\exists x \in A$ tel que $[x,y] \in U$. Le cardinal minimum d'un absorbant de G est noté $\beta(G)$.

$\omega(G)$ Désigne le cardinal maximum d'une clique (ou sous-graphe complet) de G. On a donc $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

$\omega'(G)$ Désigne le cardinal minimum d'une clique de G, maximale pour l'inclusion ; on a donc pour tout graphe G : $\omega'(G) \leq \omega(G)$ et $\omega'(G) = \alpha'(\overline{G})$.

$\theta(G)$ L'indice de partition en cliques de G désigne le plus petit nombre de cliques de G partitionnant X.
On a donc : $\theta(G) = \gamma(\overline{G})$.

$G_{X'}$ Pour une partie $X' \subset X$, $G_{X'}$ désigne le sous-graphe engendré par X' dans G.

$\nu(G)$ Une partie $F \subset E$ est appelée couplage de G si deux arêtes quelconques de F n'ont pas d'extrémités communes ; le cardinal maximum d'un tel couplage est noté $\nu(G)$.

...

K_p Désigne une clique, ou graphe simple complet, ayant p sommets.

K^*_p Désigne le graphe complet symétrique ayant p sommets.

S_p Désigne un stable, ou graphe sans arêtes, ayant p sommets.

$K_{p,q}$ Désigne le graphe formé de deux stables S_p et S_q disjoints, et de toutes les arêtes reliant un sommet de S_p à un sommet de S_q.

$\overline{G}$ Pour un 1-graphe $G = (X,U)$, $\overline{G}$ désigne le graphe $(X, X^2 - U - \Delta_U)$
Pour un graphe simple $\overline{G}$ désigne le graphe $(X, \mathcal{P}_2(E) - \Delta_X - E)$

C_p Désigne un cycle élémentaire ayant p sommets.

P_n Désigne une chaîne élémentaire ayant n sommets.

L (G) Le line-graph d'un graphe simple G - appelé quelquefois graphe adjoint de G - est obtenu en considérant un ensemble Y représentatif des arêtes de G, et en prenant $[y,y']$ pour arête de L (G) si et seulement si les deux arêtes de G représentées par y et y' ont une extrémité commune.

Colorations

γ (G) Le nombre chromatique γ (G) désigne le plus petit cardinal d'une partition de l'ensemble X des sommets du graphe simple G en stables $S_1, S_2, \ldots, S_{\gamma(G)}$.
Un résultat classique sur γ (G) est le théorème de Brooks [voir 4] : si G est un graphe simple de degré maximum h, qui n'admet pas pour composante connexe une clique de cardinal h + 1, (ni si h = 2, un cycle impair) ; alors on a : $\gamma(G) \leq h$.

ψ (G) Le nombre achromatique ψ (G) est le plus grand nombre de stables

...

$S_1, \ldots, S_\psi$ qui partitionnent X de telle sorte que pour tout couple (i,j) $1 \leq i \leq \psi$, $1 \leq j \leq \psi$, $i \neq j$, on ait une arête au moins ayant une extrémité dans S_i, l'autre dans S_j.

On a donc pour tout graphe : $\psi(G) \geq \gamma(G)$.

$q(G)$ L'indice chromatique $q(G)$ est le plus petit nombre de couplages partitionnant l'ensemble E des arêtes de G.

$\zeta(G)$ L'indice achromatique $\zeta(G)$ est le plus grand nombre de couplages $E_1, E_2, \ldots, E_\zeta$ partitionnant E de telle sorte que pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq \zeta$, $1 \leq j \leq \zeta$ et $i \neq j$, on ait une arête de E_i et une arête de E_j ayant une extrémité commune.

On a donc pour tout graphe G : $q(G) \leq \zeta(G)$.

Un théorème capital en ce domaine est celui de Viznig [voir 4] : un graphe simple de degré maximum h a un indice chromatique $q(G)$ vérifiant $q(G) \leq h + 1$.

Connexité

$\lambda(G)$ Pour un 1-graphe $G = (X,U)$, $\lambda(G)$ désigne le plus petit nombre d'arcs qu'il faut supprimer à G pour qu'il ne soit plus fortement connexe. Si G n'est pas fortement connexe ou est réduit à un sommet on pose $\lambda(G) = 0$.

Pour un graphe simple $\lambda(G)$ est le plus petit nombre d'arêtes à enlever pour que G ne soit plus connexe.

$K(G)$ Pour un 1-graphe $K(G)$ désigne le plus petit nombre de sommets à enlever à G pour qu'il ne soit plus fortement connexe ou bien réduit à un sommet.

...

Pour un graphe simple : même définition, la connexité remplaçant la forte connexité. Pour tout graphe G on a : $\underset{x \in X}{\text{Min}} \; d^{+}_{-}(x) \geq \lambda(G) \geq K(G)$

Pour tout graphe simple G on a : $\underset{x \in X}{\text{Min}} \; d(x) \geq \lambda(G) \geq K(G)$.

Le résultat de base est celui de Withney et Menger : G est fortement k-connexe si et seulement si pour tout couple (a,b) de sommets il existe k chemins élémentaires disjoints ayant a et b pour extrémités.

Cycles, chaînes

$\pi(G)$ Désigne le plus petit nombre de chaînes élémentaires partitionnant l'ensemble X des sommets de G.

$\pi'(G)$ Désigne le plus petit nombre de chaînes simples (sans répétition d'arêtes) partitionnant l'ensemble E des arêtes de G.

$s(G)$ Désigne le plus petit nombre de répétitions de sommets d'un cycle d'un graphe simple, contenant au moins une fois chaque sommet.

$\tau_k(n)$ G = (X, E) étant donné, $n = |X|$ étant le nombre de sommets ; pour $3 \leq k \leq n$, $\tau_k(n)$ désigne le plus petit nombre entier tel que : $m(G) > \tau_k(n) \Rightarrow$ G possède un cycle élémentaire de longueur $l \geq k$

ANNEXE II

Rappels des résultats concernant l'existence de cycles hamiltoniens dans un graphe simple, les diverses généralisations de ce problème, les puissances de graphes

---

Dans la suite, comme dans les autres chapitres, $G = (X, E)$ désigne un graphe simple ayant $n = |X| \geq 3$ sommets.

1. Théorèmes classiques sur l'existence des cycles hamiltoniens d'un graphe simple

La plus grande partie de ces résultats est formée de théorèmes donnant des conditions suffisantes sur les degrés des sommets d'un graphe simple ; par ordre chronologique ces théorèmes sont les suivants :

Théorème 1 (Dirac, 1952) [17]

Si G est tel que : $\min_{x \in X} d_G(x) \geq \frac{n}{2}$, alors G possède un cycle hamiltonien.

Théorème 2 (Erdös-Gallaï, 1959) [19 a]

Si G est tel qu'il existe un sommet a de degré $d_G(a) \geq 2$, et que tous les autres sommets vérifient : $d_G(x) \geq \frac{n}{2}$ $(x \in X - \{a\})$, alors G possède un cycle hamiltonien.

Théorème 3 (O. Ore, 1961) [51]

Si G est tel que pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets non adjacents on ait : $d_G(x) + d_G(y) \geq n$; alors G possède un cycle hamiltonien.

Théorème 4 (Posa, 1962) [53]

Posons $H_j = \{x \in X \text{ t.q. } d_G(x) \leq j\}$ pour $j = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{2}]^*$; alors si G est tel que $|H_j| < j$ pour $1 \leq j < \frac{n}{2}$, et $|H_{\frac{n-1}{2}}| \leq \frac{n-1}{2}$ si n est impair, il possède un cycle hamiltonien.

Théorème 5 (Bondy, 1969) [8]

Si on indexe les sommets de G de telle sorte que : $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \ldots \leq d(x_n)$, et si pour tout couple (j,k) d'indices tels que $1 \leq j < k \leq n$ on a :

$d(x_j) \leq j$, $d(x_k) \leq k - 1 \Rightarrow d(x_j) + d(x_k) \geq n$; alors G possède un cycle hamiltonien.

Théorème 6 (Chvatal, 1972) [16]

Si on indexe les sommets de telle sorte que : $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \ldots \leq d(x_n)$ et que l'on a : $d(x_k) \leq k < \frac{n}{2} \Rightarrow d(x_{n-k}) \geq n - k$; alors G possède un cycle hamiltonien.

Théorème 7 (Las Vergnas, 1972) [42 a]

S'il existe une indexation $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = X$ de l'ensemble des sommets de G, telle que pour tout couple j,k vérifiant $1 \leq j < k \leq n$, $k \geq n - j$, $[x_j, x_k] \notin E$, $d(x_j) \leq j$, $d(x_k) \leq k - 1$, on ait $d(x_j) + d(x_k) \geq n$; alors G possède un cycle hamiltonien.

Ces théorèmes, mis à part le 2 et le 3 qui ne sont pas comparables, sont de plus en plus fins ; les six premiers peuvent tous se retrouver à partir du résultat suivant de Chvatal-Bondy [8 d] :

Considérons le graphe G_1 construit à partir de G en ajoutant à celui-ci toutes les arêtes [x,y] ne s'y trouvant pas, dont les extrémités x et y vérifient $d_G(x) + d_G(y) \geq n$. Puis soit G_2 le graphe construit à partir de G_1 par le même procédé etc...

Par itération on obtient un graphe $\widetilde{G}$ vérifiant $x,y \in X \Rightarrow [x,y] \in E$ ou $d_G(x) + d_{\widetilde{G}}(y) < n$. Le théorème 8 est alors le suivant : Si $\widetilde{G}$ possède un cycle hamiltonien, alors G possède également un tel cycle.

D'autres résultats ne font plus intervenir exclusivement des conditions sur les degrés des sommets de G :

Théorème 9 (Erdös-Chvatal, 1972) [19]

Si G a une connexité K (G) et un nombre de stabilité $\alpha(G)$ vérifiant $\alpha(G) \leq K(G)$, alors il possède un cycle hamiltonien.

Théorème 10 (Fleischner 1974) [20]

Si G est 2-connexe, son carré G^2 est hamiltonien.

Théorème 11 (Harary-Schwenk 1971) [27]

Un arbre T a un carré T^2 hamiltonien si et seulement s'il est formé d'une chaîne élémentaire et de sommets pendants à distance 1 de cette chaîne.

Théorème 12 (Ore 1962 [51]

Si G possède m arêtes, avec $m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2$; alors il possède un cycle hamiltonien.

Plusieurs autres théorèmes faisant intervenir des considérations de planarité ont été publiés, nous n'en parlerons pas ici puisque nous n'avons pas eu l'occasion d'y faire référence antérieurement.

2. Généralisations du problème de l'existence d'un cycle hamiltonien : graphes hamilton-connectés, graphes p-hamiltoniens, graphes paracycliques, graphes fortement (p,q) - hamiltoniens.

De très nombreuses généralisations du problème initial de recherche d'un cycle hamiltonien ont été proposées, nous rappellerons les plus fécondes en résultats, auxquelles nous avons fait référence dans les chapitres précédents, ou bien qui sont étroitement reliées aux résultats des trois premiers chapitres.

A - Graphes pancycliques

Un graphe G est dit pancyclique s'il possède des cycles élémentaires de toute longueur l telle que : $3 \leq l \leq n$. Cette notion a été introduite par J.A.Bondy [8,b] qui a démontré :

Théorème 13 (Bondy 1971 [8 b]

Si G a un nombre d'arêtes m vérifiant : $m \geq \frac{n^2}{4}$, alors il est pancyclique ou bien biparti $K_{n/2}$, $n/2$, si n est pair.

Théorème 14 (Bondy 1974 [8 c]

Si G est 2-connexe et ne possède pas d'ensembles stables de trois sommets, alors G est un cycle élémentaire ayant 4 ou 5 sommets, ou bien est pancyclique.

Bondy propose de chercher à montrer que toutes les conditions non triviales permettant de déduire qu'un graphe G est hamiltonien, impliquant également que G est pancyclique ; dans cette voie plusieurs résultats ont été établis , en particulier :

Théorème 15 (Schmeichel et Hakimi) [54 a]

Si les degrés de G sont indexés de telle sorte que : $d(x_1) \leq d(x_2) \leq \ldots \leq d(x_n)$ et que : $d_k \leq k < \frac{n}{2}$ implique $d_{n-k} \geq n-k$; alors G est pancyclique ou bien biparti.

Les hypothèses du théorème 15 sont celles du théorème 6 de Chvatal ; ainsi sous les hypothèses des six premiers théorèmes cités au paragraphe 1, on peut conclure que G est pancyclique.

Théorème 16 (Hobbs 1973) [29 a]

Si G est 2-connexe, son carré G^2 est pancyclique.

Le théorème 16 démontre en fait beaucoup plus : G^2 est tel que pour tout sommet passe un cycle de toute longueur $3 \leq l \leq n$.

B - Plusieurs autres généralisations ont vu le jour, elles se ramènent aux notions suivantes, dues à Skupien et Wojda 1974 [57]

Soit G un graphe simple ayant n sommets et $K_n = (X, F)$ le graphe complet construit sur ces n sommets (G apparaît donc comme un graphe partiel de K_n), G sera dit fortement q-arête hamiltonien, si pour toute famille S de chaînes élémentaires de K_n, deux à deux sans sommet commun, et dont q est la somme des longueurs, le graphe $H = (X, E \cup S)$ admet un cycle hamiltonien contenant S.

Si q = 0 ,"G fortement 0-hamiltonien"signifie que G possède un cycle hamiltonien .

Si q = 1 ,"G fortement 1-arête hamiltonien"signifie que pour toute paire {x,y} de sommets de G il existe une chaîne élémentaire de longueur n - 1 dans G, ayant x et y pour extrémités ; on retrouve ainsi la notion de graphe hamilton-connecté dû à Ore [52 a] .

Si la famille S est réduite à une chaîne élémentaire de G de longueur q, "G fortement q-arête-hamiltonien" signifie que la chaîne S est inclue dans un cycle hamiltonien de G : on retrouve la notion de graphe q-chaîne hamiltonien de Kronk [41] qui intervenait dans le dernier théorème du chapitre I.

Si S est une famille de chaînes de G on obtient la notion de graphe q-arête-hamiltonien de Posa [53 a] .

On dira que G est fortement (p,q)-hamiltonien, si pour tout sous-ensemble $X' \subset X$ de sommets tel que $r = |X'|$ et $0 \leq r \leq p$, on ait $G_{X-X'}$ fortement q-arête hamiltonien.

Si q = 0," G est fortement (p,0)-hamiltonien" signifie que tout sous-graphe de G ayant un nombre de sommets supérieur ou égal à n-p est hamiltonien ; on retrouve ainsi la notion de graphe p-hamiltonien de Chartrand-Kapoor-Lick [10b]

Si q = 1, "G est fortement (p,1)-hamiltonien" signifie que pour toute paire {x,y} de sommets de G et pour tout sous-ensemble $X' \subset X$ ayant $|X'| \leq p$ sommets, le sous-graphe $G_{X-X'}$ a une chaîne hamiltonienne ayant x et y pour extrémités. On retrouve ainsi la notion de graphe (p+1)-hamilton-connecté introduite par Lick [45].

Le résultat principal de Skupien et Wojda concernant ces graphes fortement (p,q) hamiltoniens est le théorème suivant :

Théorème 17 (Skupien-Wojda 1974) [57]

Soient n,p,q des entiers positifs ou nuls tels que :
$n \geq 3$, $p \leq n - 3$, $p + q \leq n - 1$; si G possède une indexation $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

des sommets telle que pour tout couple i,j vérifiant :

$1 \leq i < j \leq n$, $i + j \geq n-p-q$, $d(x_i) \leq i+p+q$, $d(x_j) \leq j+p+q-1$ et $[x_i, x_j] \notin E$

on ait :

$$d(x_i) + d(x_j) \geq n + p + q$$

alors G est fortement (p,q)-hamiltonien.

Différents problèmes restent posés concernant ces graphes fortement (p,q)-hamiltoniens, on pourra consulter utilement à ce sujet Bermond [6 a].

. Puissance de graphes

La notion de puissance d'un graphe G, définie au chapitre I, a été introduite par Ross & Harary [26] en 1959. Ils introduisent également dans le même article la notion réciproque de racine d'un graphe : G est racine i-ème de H si l'on a $G^i = H$, et donnèrent un algorithme pour déterminer si un graphe G a pour racine carrée un arbre, et exhiber cet arbre (qui est unique). Ils constatèrent que le carré d'un graphe connexe n'a pas de sommet d'articulation, résultat qui est étendu par le théorème 1 du chapitre I publié en 1971 et 1972 [32] et [33] et, indépendamment pour les graphes simples, par Hobbs [29], [29 b] (1971 et 1973).

Les propriétés hamiltoniennes des puissancces successives d'un graphe simple sont ensuite étudiées par Sekanina et Karaganis qui démontrèrent indépendamment le théorème suivant :

Théorème 18

Soit G un graphe simple, alors G^3 est hamilton-connecté [54 b] et [40].

Sékanina étudia également le cas des graphes infinis que nous n'avons pas abordé ici [54 c] ainsi que Neuman [48 b] ; un corollaire de leurs résultats, utilisé dans le chapitre III, a été retrouvé par Harary et Schwenk [27] 1971 (Théorème 11 du § 2).

En 1966 Plummer conjectura que tout graphe 2-connexe avait un carré hamiltonien, conjecture qui fut reprise par Nash-Williams [48 a] et Kronk [41 b] avant d'être démontrée par Fleishner [20] (Théorème 10 du § 2).

Plusieurs résultats concernant le carré ou le cube d'un graphe simple connexe ont été publiés depuis le théorème de Fleischner qui a fait accomplir un progrès décisif dans ce domaine, on a notamment montré que si G est 2-connexe, alors G^2 est sommet pancyclique (Hobbs [29 a] 1973), G^2 est tel que pour tout couple de sommets $\{x,y\}$ il existe des chaînes de toutes les longueurs comprises entre $d(x,y)$ et $n - 1$ (Faudree et Schelp [19 b] 1974), G^2 est hamilton-connecté (Hobbs 1973 [28]). C'est antérieurement à ces résultats que plusieurs théorèmes du chapitre I, en particulier le théorème [32] (1971) ont été publiés.

Concernant d'autres questions qui ne sont pas abordées dans le premier chapitre (planarité, existence de racines, par exemple) on pourra utilement consulter le chapitre I de [29 b] donnant une bibliographie détaillée.

BIBLIOGRAPHIE

+.+.+.+.+

[1] ABD EL KADER, Problèmes de connexités dans les tournois. A paraître.

[1 a] A.ALTSHULER, Hamiltonian circuits in some maps on the torus, Discrete Mathematics, Vol.1, N°4 (1972), p.299-314.

[2] J.C.ARDITTI, Communication privée.

[3] C.BERGE, "Perfect graphs" six papers on graph theory, Indian Statistical Institute, Calcutta (1963).

[4] C.BERGE, Graphes et hypergraphes, 2e edition, Dunod, Paris (1973).

[4 a] C.BERGE & Ray CHAUDHURY, Hypergraph seminar, Lecture Notes in Mathematics, n°411 (1974), Springer-Verlag.

[5] J.C.BERMOND, Arbres maximaux ayant au plus n sommets pendants, C.R. Acad.Sc.Paris, t.274, p.1878-1881 (1972).

[6] J.C.BERMOND, Communication privée.

[6 a] J.C.BERMOND, Thèse Paris VI (1975), à paraître.

[7] J.A.BONDY, Large cycles in graphs. Proc.of the first Louisiana Conference on combinatorics graph theory and computing. Louisiana State University (1970), p.47-60, ed.R.C.Mullin K.B.Reid D.P.Roselle.

[8] J.A.BONDY, Properties of graphs with constraints on degrees. Sludia Sc. Math.Hung. (4) (1969), 473-475.

[8 a] J.A.BONDY, Variation on the hamiltonian theme, Canad.Math.Bull., 15 (1972), p.57-62.

[8 b] J.A.BONDY, Pancyclic graphs I, Journ.of Comb.Theory 11, (1971), p.80-84.

[8 c] J.A.BONDY, Pancyclic graphs II, à paraître.

[8 d] J.A.BONDY & V.Chvatal, a method in graph theory , à paraître.

[9] F.BORIES & J.L.JOLIVET, On complete colorings of graphs .Proceedings of the colloquium held at Prague , June 1974.

[10] F.BORIES, Thèse de 3ème cycle,Fac.Sciences Le Mans (en préparation).

[10b] G.T. CHARTRAND, S.F.KAPOOR, D.R.LICK,n-Hamiltonian Graphs, Journ. of Comb.Theory 9, p.308-312 (1970).

[11] G.T.CHARTRAND, S.F.KAPOOR, H.V.KRONK, A generalisation of hamilton connected graphs, J.Math.Pures et Appl. (48) (1969) , p.109-116.

[12] G.T.CHARTRAND, F.HARARY, Graphs with prescribed connectivities. Theory of graphs. Erdös-Katona. Akademiaï Kutato, Budapest (1969) , p.61-63.

[13] G.CHARTRAND & H.V.KRONK, Randomly traceable graphs , SIAM J.Appl.Math. 16 (1968) p.696-700.

[14] G.T.CHARTRAND, Thèse,Michigan - State University 1963 .

[15] V.CHVATAL, New directions in hamilton graph theory. A paraître.

[16] V.CHVATAL, On hamilton ideals, Journal of Comb.Theory 12 (B) (1972), p.164-168.

[17] G.A.DIRAC, Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1962) 69-81.

[18] G.A.DIRAC, A short proof of Menger's graph theorem. Mathematika 13 (1966) p.42-44.

[19] P.ERDOS & V.CHVATAL, A note on hamiltonian circuits. Discrete Math. (1972) p.111-113.

[19 a] P.ERDOS & T.GALLAI, on maximal paths and circuits of graphs.Acta Math. Ac.Sc.Hung.,10 (1959) p.337-356.

[19 b] R.J.FAUDREE & R.H.SCHELP, The square of a block is strongly path-connected. A paraître.

[20] H.FLEISCHNER, The square of every two-connected graph is hamiltonian , Journal of comb.theory (B),16 (1974),p.29-34.

[21] L.R.FORD & D.FULKERSON, Flows in networks.Princeton Press, Princeton. (1962).

[22] GALLAÏ-MILGRAM, Verallgemeinerung eines graphen theoretishen Statzes von Redei. Acta.Sc.Math.,21, (1960) p.181-186.

[23] A.GHOULIA-HOURI, Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien. C.R.Acad.Sc. 251, (1960), p.494.

[24] R.P.GUPTA, Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs. Mimeo series n°577. Univ.of North Carolina at Chapel Hill, 63, (1968).

[25] F.HARARY, S. HEDETNIEMY, The achromatic number of a graph. Journal of Comb. Theory, p.154-161 (1970).

[26] F.HARARY, I.C.ROSS, The square of a tree, Bell system Tech. J.39 (1960) p.641-647.

[27] F.HARARY- A.SCHWENK, Trees with hamiltonian square. Matematika 18 (1971) p.138-140.

[28] A.M.HOBBS, The square of a block is hamiltonian-connected ; University of Waterloo preprint.

[29] A.M.HOBBS, Some hamiltonian results in powers of graphs. Journal of Research of the National Bureau of standars B.Vol.77.B 1-2, Janvier 1973.

[29 a] A.M.HOBBS, The square of a block is vertex pancyclic, à paraître.

[29 b] A.M.HOBBS, Hamiltonian paths in powers of graphs. Thèse Université de Waterloo, Ontario (1971).

[30] F.JEAGER & C.PAYAN, Séminaires Fac.Sc. Grenoble 1970, 1971, 1972 .

[31] F.JEAGER & C.PAYAN, Comptes-rendus Acad.Sc.Paris t.274, p.728-730. Serie A (1972).

[32] J.L.JOLIVET, Sur les puissances des graphes connexes. C.R.Acad.Sc. Paris t.272, p.107-109.

[33] J.L.JOLIVET, Sur la connexité des graphes orientés. C.R.Acad.Sc. Paris t.274, p.148-150 (1972).

[34] J.L.JOLIVET, Sur le joint d'une famille de graphes. Discrete Mathematics. Vol.1973, p.145-158.

[35] J.L.JOLIVET, Le joint d'une famille de graphes, Compte-rendu du colloque de l'Institut des Hautes Etudes de Bruxelles. Avril 1973.

[36] J.L.JOLIVET, The join of a family of graphs. Proceedings of the colloquium held at Kesthely, Hungary, June 1973.

[37] J.L.JOLIVET, Indice de partition en chaînes d'un graphe simple et pseudo-cycles hamiltoniens.C.R.Acad.Sc.Paris t. 279 p.479-482(1974).

[38] J.L.JOLIVET, Pseudo-hamiltonian cycles in graphs. Proceedings of Fifth South Eastern Conference on Combinatorics in Boca-Raton, Floride (U.S.A.) (1974).

[39] J.L.JOLIVET & H.RAYNAUD, Sur quelques problèmes de parcours hamiltoniens arbitraires dans les graphes finis.C.R.Acad.Sc.Paris, 1970, p.1670-1672, t.270.

[40] J.J.KARAGANIS, On the cube of a graph. Canad. Math.Bull.11 (1968), p.295-296.

[41] H.V.KRONK, A note on K-path hamiltonian graphs. Journal of comb.theory (7), p.104-106.

[41 a] H.V.KRONK, Variation on a theorem of Posa, Many facets of graph theory (Ed. by G.T.Chartrand and S.F.Kapoor), Lectures Notes in Math. 110, Springer-Verlag (1969), p.193-197.

[41 b] H.V.KRONK, Is the square of every non separable graph hamiltonian ? Amer.Math.Monthy 76 (1969), p.1045-1046.

[42] M.LAS VERGNAS, C.R.Acad.Sc.Paris, t.272, (1971) p.1297.

[42 a] M.LAS VERGNAS, Problèmes de couplages et problèmes hamiltoniens en théorie des graphes, Thèse Paris VI (1972).

[43] L.LESNIAK, Results on edge connectivity of graphs, Discrete Math. 8 (4), (1974), p.351-354.

[44] D.R.LICK, A sufficient condition for hamiltonian connectedness. Journ. of Comb.Theory, p.444-445 (1970).

[45] D.R.LICK, n-hamilton-connected graphs. Duke Math. Journ. 37 (1970) vol.41, p.387-391.

[46] L.LOVASZ, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture . Discrete Math., 2 (1972) p.253-267.

[47] K.MENGER, Zur allgemeinen Kurventheorie. Fund.Math., 10 (1926), 96.

[48] H.MEYNIEL, Une condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté. Journal of Comb. theory (B) 14 p.137-147 (1973).

[48 a] C. St.J.A.NASH-WILLIAMS, Probleme n°8, Theory of graphs (P.Erdös & G.Katona ed.), Academic Press, New-York (1969).

[48 b] F.NEUMAN, On ordering vertices of infinite trees, Casopis Pest.Mat. 91 (1966), p.170-177.

[49] E.A.NORDHAUS, J.W.GADHUM, On complementary graphs.Ann.Math. Monthly, 63 (1956),p.175-177.

[50] O.ORE, Theory of graphs. A.M.S.Colloquium Publication, Vol.38. Providence Rhode Island.

[51] O.ORE, Note on hamiltonian circuits. Amer.Math.Montly 67 (1960),p.55.

[52] O.ORE, Hamilton-connected graphs. Journal Math.Pures et Appl. Vol.42 (1963), p.21-27.

[52 a] O.ORE, The four color problem, Pure and Applied Math, 27. New-York Academic Press (1967).

[52 b] J.PETERSEN, Die Theorie der regulären Graphen, Acta . Math. 15, (1891), p.193-220.

[53] L.POSA, A theorem concerning hamilton Lines. Magyar Tud.Akad. Mat. Kutato Int.Kozl 7 (1962), p.225-226.

[53 a] L.POSA, On the circuits of finite graphs, Magyar tud. Akad.Mat.Kutato Int.Kozl. (1963), p.355-361.

[53 b] G.RINGEL, Map color theorems. Springer-Verlag (1974).

[54] SACHS, On the Berge conjecture concerning perfect graphs. Combinatorial structures and their applications. Gordon and Breach, New-York (1970).

[54 a] E.F.SCHMEICHEL & S.L.HAKIMI, Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvatal, à paraître au Journ.of Comb.Theory (B).

[54 b] M.SEKANINA, On an ordering of the set of vertices of a connected graph, Publ.Fac.Sc. Université de Brno, Tchécoslovaquie, n° 412 (1960), p.137-141.

[54 c] M.SEKANINA, On an ordering of the vertices of a graph, Casopis Pest. Mat. 88 (1963) , p.265 - 282.

[54 d] M.SEKANINA, Verallge meinerte Hamiltonsche Linien, Beiträge Zur Graphen theorie, B.G. Teubner Verlags gesellschaft, Leipzig (1968).

[55] J.SLATER, S.GOODMAN, S.HEDETNIEMY, On the optional hamiltonian problem. Proceedings of the fifth southeastern conference on combinatorics in Boca-Raton , Floride (U.S.A.) (1974).

[56] H.WITHNEY, Congruent graphs and the connectivity of graphs . Am.J.Math. 54 (1932), 150-168.

[57] SKUPIEN & A.P. WOJDA, On highly hamiltonian graphs, Bull.Acad.Sc.Pol. 22 (1974), p.463-471.

[57 a] Z.SKUPIEN & A.P.WOJDA, Sufficient conditions for λ-edge hamiltonian graphs Bull.Acad.Sc.Pol. 19 (1971), p.391-396.

58] D.R.WOODAL, Sufficient conditions for circuits in graphs. Proc. of London Math.Soc. 3 Vol.XXIV, May 1972, p.739-755.

58 a] J.W.T.YOUNGS, Minimal Imbeddings and the gems of a graph, Journ. of Math. and Mechanics, Vol.12, N°2 (1963),p.303-315.

59] A.A.ZYKOV,On some properties of linear complexes. Amer.Math.Soc.Transl. n°79,(1952); Mat.Sb.,66, (1949),p.163-188.